

现代应用数学丛书

网络理论

〔日〕喜安善市 大野克郎 池野信一 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

网 絡 理 論

喜安善市

〔日〕大野克郎 著

池野信一

陆 志 剛 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本,重点介绍网络的综合理论。共分两篇9章。第一篇7章,叙述网络的基础理论和传输四端网络的设计方法,对二端及四端网络的逼近问题、实现问题、等效问题作了系统扼要的讨论。第二篇2章介绍多端网络理论,主要属于本书作者大野克郎的工作。

本书可供数学工作者及有关的工程技术人员、科研工作者参考。

现代应用数学丛书

网 絡 理 論

原书名 回路網理論

原出版者 岩波书店, 1957

喜安善市

原著者 [日] 大野克郎

池野信一

譯 者 陆 志 剛

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业许可证出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

商务印书馆上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 4 30/32 字数 114,000

1963年6月第1版 1963年6月第1次印刷

印数 1—5,000

統一书号: 13119·511

定 价: (十四) 0.84 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共 15 卷 60 册, 分成 A、B 两组, 各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并, 整理成 42 种, 不另分組編号, 陸續翻譯出版。

这套书涉及的面很广, 其內容都和現代科学技术密切有关, 有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富, 而敘述扼要, 篇幅不多, 有利于讀者以較短時間掌握有关学科的主要內容。虽然, 这套书的某些观点不尽适合于我国的情况, 但其方法可供参考。因此, 翻譯出版这一套书, 对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是 1957 年起以讲座形式陸續出版的, 写作時間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理, 为了尽可能地减少这种影响, 我們在每一譯本中, 特請譯者或校閱者撰写序或后記, 以介紹有关学科的最近发展状况, 并对全书內容作一些評价, 提出一些看法, 結合我国情况补充一些資料文献, 在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志, 为提高书籍的质量付出了巨大劳动, 在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯 者 · 序

各个元件所組成的一個系統都可看成為一個網絡。網絡理論就是研究網絡的普遍定律及其計算方法的理論。近一百多年來，網絡理論已經形成為一門獨立的學科，並且在每個不同領域內得到了廣泛的應用。

本書敘述了網絡理論中，特別是綫性無源網絡的綜合理論中，近數十年來的**主要結果**，國內這類書籍極少，確是值得介紹的一本。其優點是內容精練、編排妥善。當然，伴隨而來的缺點是證明不嚴格，或者只能知道最後結果，看不到中間細節。此外，本書的內容還只是網絡理論中一部分成果，遠不是網絡理論的全貌。

下面想對各個章節再作些補充說明。

第1章

近年來，網絡理論的新興學科分支很多，其中特別重要的，還有應用在微波範圍的**微波網絡**或**立體網絡理論**，與近年來發展起來的參量放大器密切有關的**變參量網絡理論**，以及從網絡觀點上研究信息傳輸的**信息網絡理論**。

事實上，網絡理論依靠近代數學工具开辟了各個方向，這些方向大致有

1. 拓撲學在網絡理論上的應用——網絡拓撲理論，
2. Boole代數在網絡理論上的應用——開關網絡理論，
3. 矩陣及張量在網絡理論上的應用——多端網絡理論，
4. 場論在網絡理論上的應用——微波網絡理論，
5. 非綫性微分方程在網絡理論上的應用——非綫性網絡理論，

6. 变系数微分方程在網絡理論上的应用——变参量網絡理論，

7. 函数論在網絡理論上的应用——網絡綜合理論，

8. 概率論和統計数学在網絡理論上的应用——信息網絡理論，

本书所述的網絡理論，主要是函数論的方向，亦就是近数十年来，主要的方向——網絡綜合。

網絡綜合理論主要包括三个方面，第一是逼近理論，第二是实现理論，第三是等效理論。逼近理論即是如何由實踐給出的条件，近似地化成可实现網絡的必要和充分的条件。实现理論主要研究一个物理可实现網絡所必須滿足的条件和能够求出網絡結構及元件数值的充分条件。等效理論即是在保持某种对外关系下，由一种結構变换成另一种結構的普遍方法。本书在这三方面都談到一些，但重点是在实现理論。

第1章內，把实部和虛部的关系作为綫性網絡的性质放在最后，似乎另立一章更相宜。这里只列出了其間的关系，至于这些关系的詳細証明以及如何使用曲綫或数表近似地計算，請參閱 Bode^①，Tuttle^②，Thomas^③。

第2章

对于二端網絡的一些定理，这本书写得很好。讀者若要知道細節，可以參考 Tuttle^②。在二端網絡理論內，除了正实函数外，

① H. W. Bode: Network analysis and feedback amplifier design, D. Van Nostrand, New York, 1945.

② D. F. Tuttle, Jr.: Network Synthesis, John Wiley & Sons, New York, 1958.

③ D. E. Thomas, Tables of phase associated with a semi-infinite unit slope of attenuation, B. S. T. J., 26(1947), 870~899.

还可加入损耗函数的概念^①, 损耗函数或称閔乃大函数^②, 它的定义是满足下列条件的函数 $W(\lambda)$:

(1) λ 为实数时 $W(\lambda)$ 为实数,

(2) $W(\lambda)$ 在 λ 的右半閉平面上是正规的, 但 $\lambda \rightarrow \infty$ 时可能是例外, $W(\lambda)$ 在 $\lambda = \infty$ 允許有一个单阶极点,

(3) 在 λ 的虚軸上, $\operatorname{Re} W(\lambda) > 0$, 但 $\lambda \rightarrow \infty$ 时可能是例外, $W(\lambda)$ 在 $\lambda = \infty$ 允許有一个单阶零点, 此时 $\operatorname{Re} W^{-1}(\lambda)$ 必須是正的实数。

损耗函数在处理带损耗的电抗元件所构成的网络时很有用^③。此外, 近年来对于 Bott-Duffin 綜合法提出了許多种变形^④, 对于不是有理的正实函数亦有許多討論^⑤。这一章最后提到的宮田方法現在已被推广^⑥。

① 参看閔乃大: Verwirklichung von linearen Zweipolschaltungen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit unter Berücksichtigung der Verluste von Spulen und Kondensatoren, Arch. Elektrotech., 39(1949), 359~387.

② 参看 Б. В. Бухаков: Колебания, Москва, Техникотеоретической литературы, 1954.

③ 参看閔乃大: Verwirklichung von linearen Vierpolschaltungen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit unter Berücksichtigung übereinstimmender Verluste aller Spulen und Kondensatoren, Arch. Elektrotech., 39(1949), 453~471.

④ 参看 R. H. Pantell: New methods of driving-point and transfer-function synthesis, Stanford University Tech. Rept., 1954, Proc. IRE, 42(1954), 861, 及 J. E. Storer: Relationship between the Bott-Duffin and Pantell Impedance Synthesis, Proc. IRE, 42 (1954) 1451 和 F. M. Reza: A Bridge Equivalent for a Brune Cycle Terminated in a Resistor, Proc. IRE, 42(1954), 1321.

⑤ 参看 L. Weinberg, Progress in the United States During 1957~1960 on Circuit Theory, Jour. of Research of the National Bureau of Standards, 64D (1960), No. 6, 687~706.

⑥ 参看 E. A. Guillemin: New Methods of Driving-point and Transfer Impedance Synthesis, Proc. Symposium Modern Network Synthesis (1955), 119, 及 E. S. Kuh: Special Synthesis Techniques for Driving-point Impedance Functions, Trans. IRE, CT-2 (1955), 302.

第3章

这一章的内容是网络理论的基础知识。§ 20 是 Cauer 的电抗四端网络综合方法，详细的证明可参看他的原著^①。这里只讲了给定阻抗矩阵的综合方法，应注意这种方法同样能用于电抗四端网络的导纳矩阵。此外，Piloty^② 还给出了电抗四端网络锁联矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

的必要和充分条件为

(1) A, B, C 和 D 都是实系数的有理函数， A 和 D 是 λ 的偶函数， B 和 C 是 λ 的奇函数。

(2) $AD - BC = 1$ 。

(3) $A + B + C + D$ 在 λ 的右半闭平面上没有零点。

综合的方法也是利用图 19.1, 图 20.4 和图 20.5 等网络的锁联。(20.9) 这些公式的推导，参看上列 Piloty 的论文，更容易理解。

第4章

这一章主要是 Zobel 和 Cauer 的结果，内容比较陈旧。按译者管见，读者不一定要在影象参数理论上化太多时间。

第5章

与影象参数理论比较，工作参数理论似乎更实用，理论更完

① W. Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Bd I, 2te Auflage, Berlin, Akademie Verlag, 1954; Bd II, Berlin, Akademie Verlag, 1960.

② H. Piloty: Kanonische Kettenschaltungen für Reaktanzvierpole mit vorgeschriebenen Betriebseigenschaften, T.F.T., 29(1940), Heft 9, 10, 11; Über die Realisierbarkeitssätze der Kettenmatrix von Reaktanzvierpolen, T. F. T., 30 (1941), 217~223.

美。這一章內，讀者可以仔細体会 Cauer 如何由給定的電抗四端網絡的 S , M 或 N 求出阻抗矩陣或導納矩陣，從而用第 3 章的方法把網絡綜合出來。Cauer 又按濾波器的要求適當地規定了特性函數 φ ，得出了目前較完善的工作參數濾波器設計理論^①。

1955 年，閔乃大証明損耗四端網絡的工作傳輸函數總可以用無互感的損耗四端網絡實現出來^②，且給出了實現方法。對於任意的四端網絡，還需要繼續研究它們的實現方法。

第 6 章

網絡理論中，逼近問題是一個重要問題，同時又是數學領域內逼近理論的直接應用。網絡理論內，按照網絡的特性是用頻率函數還是用時間函數來描述的，就有頻率域的逼近和時間域的逼近之分。頻率域和時間域雖然以 Fourier 變換關聯起來，但是它們的逼近誤差之間的关系是一個中心問題。1954 年 Winkler 對於網絡的逼近理論作了綜述^③，讀者可以從他列出的 240 篇文獻中找到關於這方面的討論。在頻率域上，值得注意電位模擬的方法^④以及 Darlington 的 Tschebyscheff 多項式級數的方法^⑤；在時間

① 可參看上頁腳注中 W. Cauer 的書和 R. Saal and E. Ulbrich: On the Design of Filters by Synthesis, Trans. IRE, OP-5(1959), 284~327; 及 R. Saal: Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe, Frequenz, 15(1961) Nr. 4, 111~121 以及 V. Fetzner: Die numerische Berechnung von Filterschaltungen mit Tschebyscheffschem Verhalten der Betriebsdämpfung nach der Methode von W. Cauer, A. E. Ü., 6 (1952), 419~431.

② 閔乃大：綫性網絡中預給工作傳輸函數由損耗網絡元素實現的理論，科學出版社，1957。

③ S. Winkler: The approximation problem of network synthesis, Trans. IRE, OP-1, 3(1954), 5~20.

④ 參看 A. R. Boothroyd: Design of Electric Wave Filters with the Aid of the Electrolytic Tank, Proc. IEE, IV, 98(1951). S. Darlington: The Potential analogue method of Network synthesis, B. S. T. J., 30(1951), 315~335.

⑤ 參看 S. Darlington: Network Synthesis using Tschebyscheff polynomial Series, B. S. T. J., 31 (1952), 613~665.

域上,应注意正交函数的方法^①。此外,即使有了逼近理論,实际应用时还是离不了精确的計算,所以电子数字計算机在網絡理論上的应用是不容忽視的^②。

第7章

这一章叙述的特殊四端網絡理論,虽然是一般四端網絡理論的特殊或推广情况,但由于存在它們独特的条件或限制,这些理論仍在網絡理論中占重要地位。

关于 RC 網絡,除了书內談的 Guillemin 和尾崎的工作外,譯者认为还可以注意 Fialkow 和 Gerst 的工作^③以及 Dasher 的工作^④。此外,林在旭曾对 RC 四端網絡的工作傳輸函数提出必要条件,且討論了 RC 網絡的影象参数理論和鎖联实现法。

本书作者池野曾在分布参数網絡,特别是书內所談的分布参数網絡上,进行过一些研究,他曾利用这种理論实际設計了超高频波段的滤波器^⑤。

第二篇

这一篇基本上是大野克郎本人工作的重写,請參看他的

① 參看李郁榮: Statistical Theory of Communication, John Wiley & Sons, Inc. 1960 及 Synthesis of electrical networks by means of the Fourier transforms of Laguerre's functions, J. M. P., 11(1932), 83~113.

② 參看 T. R. Bashkow and C. A. Desoer: Digital computers and Network theory, IRE WESCON Conv. Rec., 1957, pt. 2, 133~137 及 Trans. IRE, OF-8 Sept. 1961, 用計算机設計網絡专集。

③ A. D. Fialkow and I. Gerst: The Transfer Function of an RC Ladder Network, J. M. P., 30(1951), 49~72.

④ B. J. Dasher: Synthesis of RC Transfer functions as unbalanced two terminal-pair networks, Trans. IRE, PGCF-1(Dec. 1952), 20~34. 还可參看 E. A. Guillemin: Synthesis of passive Networks, John Wiley & Sons., New York, 1957.

⑤ 池野信一: 分布参数滤波器的一种設計理論, 电气通信学会杂志, 35(1952), 544~549 及分布参数網絡的合成, 电气通信学会杂志, 42(1959), 585~591.

原著^①。

最后，总觉得本书内沒有介紹网络拓扑方面以及有源网络綜合方面的成就是一个不足。有关这两方面以及网络理論其他方面的最近进展，讀者可参閱 Cauer 的书^② 及 Weinberg 的綜合性文章^③。

① 大野克郎，安浦龟之助，按照 s 矩陣的一般多端网络的构成理論，电气通信学会杂志，36(1953)，564~570；大野克郎，Application of Scattering Matrices to the Synthesis of n Ports, Trans. IRE, OT-3 (1956)，111~120.

② Cauer, Synthesis of Linear Communication Networks, Vol. I, II, McGraw-Hill Co., 1958, 附录 5.

③ 見第 3 頁脚注②。

序

网络理論受到两方面的关心，一方面是直接处理网络本身的电工程、通信工程和控制工程，另一方面是数学，数学上感兴趣的是它的应用。无论从哪方面看，网络理論和其他应用数学有所不同。它不仅提供了机器設計的手段，且能把机器引导出来。网络的直观和网络的解釋也象几何学的直观和几何学的解釋一样，可以在数学研究上發揮重要的作用。

撰写本书时，考虑到网络理論的上述特点及其广泛的应用，所以重点在于闡明基础概念和系統讲述，同时亦收集了最近的成果，留意了发展的方向。第一篇討論网络的基础概念和应用上最感兴趣的傳輸四端网络的函数論設計方法，第二篇作为网络理論核心，叙述多端网络綜合理論和与此有关的等效网络理論。关于网络的問題，还有自动控制的网络和立体网络等等。前者在本丛书的另一本內討論；后者由于篇幅的限制，只能割爱，对于这种网络，在它們本部門內說明，相信会足够理解的。

由于水平的限制，我們很担心本书能否滿足讀者的期望，希望批評指正。

作 者 1957 年 3 月

目 录

出版說明

譯者序

序

第一篇 基础理論和傳輸四端網絡的設計理論	1
第1章 緒論	1
§1 網絡理論的意义和发展	1
§2 網絡的基础概念	2
§3 網絡的分类	4
§4 綫性網絡的性质	6
第2章 二端網絡	14
§5 阻抗和导納	14
§6 基本元件	15
§7 集中参数網絡	17
§8 能量原理和正实函数	18
§9 倒量網絡和补量網絡	25
§10 电抗函数	26
§11 Hurwitz 多項式	28
§12 RL 和 RC 網絡	31
§13 二端網絡的綜合	32
第3章 四端網絡	40
§14 四端網絡	40
§15 四端網絡的表达方法	41
§16 傳輸系数	44
§17 影象参数	46
§18 四端網絡的結合	48

§ 19 简单的四端网络及其变换	49
§ 20 电抗四端网络	52
第4章 影象参数理论	57
§ 21 电抗四端网络的影象参数	57
§ 22 定 K 型和 m 诱导型方法	60
§ 23 对称和反对称滤波器	62
第5章 工作特性理论	66
§ 24 工作传输系数的性质	66
§ 25 电抗四端网络的传输系数	68
§ 26 在二端网络综合理论上的应用	73
第6章 逼近理论	74
§ 27 逼近的意义和方法	74
§ 28 Fourier 级数	74
§ 29 位论的应用	76
§ 30 滤波器	79
§ 31 频率变换	86
§ 32 延迟网络	87
§ 33 时间域上的逼近理论	89
第7章 特殊网络	94
§ 34 RC 网络	94
§ 35 分布参数网络	97
§ 36 非互易网络	103
第二篇 多端网络理论	107
第8章 基础理论	107
§ 37 绪论	107
§ 38 理想变压器网络和线性变换	112
§ 39 电阻多端网络的综合	114
§ 40 正实矩阵	115
§ 41 电抗 $2n$ 端网络的综合	120
§ 42 $2n$ 端网络综合的概要	120

第9章 多端网络和 S 矩阵	125
§ 43 有关 S 矩阵的基本定理	125
§ 44 滤波器和 S 矩阵	128
§ 45 全通网络	129
§ 46 利用 S 矩阵的 $2n$ 端网络综合法	130
§ 47 非互易 $2n$ 端网络	139
参考文献	141

第一篇^① 基礎理論和傳輸

四端網絡的設計理論

第1章 緒 論

§1 網絡理論的意義和發展

網絡理論，簡單地說，就是電網絡的響應特性的學問。它的數學內容，極少說只在電網絡中有意義。換言之，如果關於電流和電壓的語言各用力和速度或熱量和溫度等代替，則結果在形式上也是成立的。這相當於 D. Hilbert 在幾何學中把點、直線、平面代成桌子、椅子、黑板的構成。可是，溫度的情形另作別論，力和速度，特別是音壓和速度的情形，不僅在語言上有形式的對應，而且有物理實體的對應。因此，常採用機械系統的等效電網絡的概念，網絡理論不僅在電工程中，而且在極廣泛的應用領域中都在發展。這反映了網絡理論作為數學的一個分支有着廣闊的前途。

網絡理論是和電通信技術的發展一起成長起來的。電報或電話的通信距離愈益增長，結果使線路費用大大增加，為了經濟地利用這種價格高昂的線路，才開始對信號的傳輸進行了系統的研究，由於這一環，就建立了現在的網絡理論。歷史上，Kelvin 爵士關於海底電纜傳輸電報符號的研究，代表了一維連續體上波的傳播研究的開始，其後進入這種模型的集中參數網絡的研究，但到現在，卻把集中參數時間不變的網絡當作理論體系的基础。

另一方面，又從網絡分析發展到網絡綜合，從互易網絡發展到非互易網絡，從綫性網絡到非綫性網絡，從無源網絡到有源網絡以

① 第一篇由池野執筆。

及向更一般方向发展。

§2 网络的基础概念

给定了一个含有导体的物理系统内部的电磁情况,利用边界条件和初始条件进行计算,求出这导体上流动的电流分布,这是电磁学的问题。可是,这种系统可分成全用理想的导线^①联接起来的若干部分,各部分除了有流过这种导线的电流以外,假定没有其他能量上的交换。在考虑这种系统的问题时,网络理论不涉及各部分的内部现象,只着重讨论流过各导线的电流的相互关系。这里已经不出现与空间坐标有关的偏微分方程,而只有时间的函数,至多是可数个变量之间的关系问题,这和力学中质点或刚体等问题有点相似。研究电流的相互关系时,单靠电流来描述网络的现象,实际上是极不方便的,在力学中,除速度以外,还有力的概念。同样,现在采用另一个量电压。它和电流的乘积即为功率,是表示单位时间内能量移动的一个量。

上述的部分系统叫作(网络)元件,它的内部不是网络理论的讨论对象,它的性质仅通过和外面联接的导线观测到的现象规定出来。例如,天线可以考虑为在其内部包圍电波辐射空间、反射体等具有两条接线的元件。可是,对于普通的网络,不是指如此一般的东西,只限于象第2章所述的称为基本元件的几种元件。

为了使网络中的电流流动,必须具有电流之源。这称为电源^②。还有一种元件,它为了实际使用,能使加入的信号电流的能量变成其他形式,例如变成声波能量,这种元件通常称为负载。在

① 理想的导线是从它的一端传送电流至另一端时没有能量损失也没有延迟的导线。

② 电源的名称是对电力关系的网络而言,此时有能量传输的问题;对于通信关系的网络,主要是电流的时间变化即波形问题,此时叫作信号源更为恰当。这种意义下的电源,必须和下节所述的作为能源的有源元件相区别。

图 2.1 内, 除电源和负载外, 剩下部分是将信号电流从电源传输至负载。网络理论主要是处理这一部分。电源、负载等与外部电路联接的点称为**端子**。

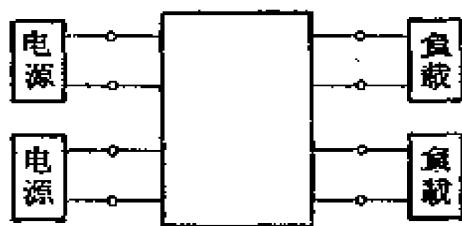


图 2.1

网络理论主要涉及两类问题, 其一是在性质已知的若干元件接成一个型式以后, 要求表明整个特性的**分析问题**, 其另一是反过来, 为了得出给定的特性, 要求决定什么样的元件和什么样的联接方法的**设计问题**。对于后者, 又分为要求决定满足实现条件的, 且逼近给定特性的、适当次数的网络函数的**逼近理论**, 和由此决定网络构造的**综合理论**。

虽然给定了特性, 但与此对应的网络构造实际上不止一种, 而有无数多种, 由这种端子所见的性质相同但构造不同的网络, 称为**等效网络**。关于等效网络的理论, 读者可参考本书的第二篇。

构成网络理论时, 它的基本原理是下述的 **Kirchhoff 法则**、**因果律**、**能量原理** 三种。其中 Kirchhoff 法则是关于网络联接型式的法则, 即表示出几何学方面的规律; 后两者规定电流和电压之间关系的函数在函数论上的性质。

(i) **Kirchhoff 法则** 它包括两个法则。

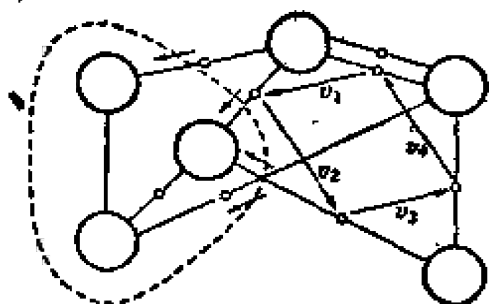


图 2.2

法则 1 —— 汇集在分歧点上的电流之和等于零 (或者取一般的如图 2.2 所示的包围网络一部分但不与元件相交的一个闭曲面, 则通过与这个曲面相交的导线流入曲面内的电流之和等于零)。

法则 2 —— 绕任意闭路一周的电压之和等于零 (例如在图 2.2 中, $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$)。

(ii) **因果律** 这就是所謂“原因必須比結果在先”的根本原理，又若網絡状态不改变，則可表成更强的形式“同一原因給出同一結果”。

(iii) **能量原理** 对于内部沒有能量源的網絡，由此取出的能量不能大于过去加入的能量。这对于以后要讲的无源網絡，是一个重要的原理。

§3 網絡的分类

網絡的范围极为广泛，把它包括在一个理論体系內并不容易。因此，以下有各种观点的分类，并說明本书中討論的網絡范围。

1) **不变的網絡和可变的網絡** 为了簡單起見，只叙述輸入和輸出不多于一个的情况，但同样也可考虑多个輸入和輸出的情况。設輸入为 $i(t)$ 时輸出为 $v(t)$ ，如果輸入为 $i(t+t_0)$ 时，輸出成为 $v(t+t_0)$ ，則这种網絡叫作不变的網絡，否則叫作可变的網絡。本书討論的只是前者。

2) **綫性網絡和非綫性網絡** 設輸入为 $i_1(t)$ 时輸出为 $v_1(t)$ ，輸入为 $i_2(t)$ 时輸出为 $v_2(t)$ ，若对于輸入 $a_1 i_1(t) + a_2 i_2(t)$ ，輸出为 $a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$ ，即迭加原理成立，則这种網絡叫作綫性網絡，否則叫作非綫性網絡。本书只考虑前者。后者的理論很复杂，即使很簡單的情况，也不一定解得出来。

3) **无源網絡和有源網絡** 象电子管、半导体等元件，具有能量源，当傳輸信号之际，由它們加入能量，这种元件称为有源元件，含有有源元件的網絡称为有源網絡，不包含有源元件的叫作无源網絡。本书只討論后者。

4) **互易網絡和非互易網絡**① 在图 3.1 內，所謂互易定理就

① “互易”在英語內是“reciprocal”，也有人采用“可逆”兩字。

是“网络的一个分支①中加入电动势 v 时,其他一个分支中流有电流 i_2 , 反之,在第二分支中加入同一电动势 v 时,若第一分支中的电流为 i_1 , 则 $i_1 = i_2$ ”,在输入输出端子对之间这个定理成立的网络称为互易网络,否则称为非互易网络。有源网络和非线性网络多半是非互易的,但须注意,无源线性的网络亦有非互易的。关于这一点,将在第7章中说明。

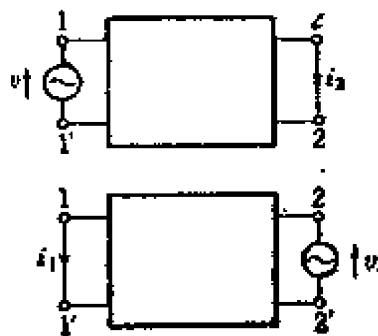


图 3.1

5) 集中参数网络和分布参数网络

元件端子上规定了电流和电压的瞬时值以后,内部状态完全被规定的元件叫作集中参数的元件。例如电阻、电容、电感、理想变压器、理想回转器 (gyrator), 理想放大器等就是这种元件。有限多个集中参数元件联接所得的网络称为集中参数网络, 否则称为分布参数网络。其中,分布参数网络多半在较狭的意义上使用着,通常指的是象传输线路那样的可以看成由两种以上无限小集中参数元件连续分布组成的网络。在本书内,主要讨论集中参数网络,在第7章内,我们要简单地讨论一下分布参数网络。

6) 电抗网络和损耗网络 不消耗能量的,即输入的能量必定再能以电流的形式取出的无源网络叫做电抗网络, 否则叫做损耗网络②。

7) 有限网络和无限网络 由有限多个元件组成的网络叫做有限网络, 由无限多个元件组成的网络叫做无限网络。上述的分布参数网络,广义上,也可归入无限网络,但无限网络注意的不是那种连续分布的东西,而是两种以上独立元件的可数无限多个的联接。无限网络具有很多在有限网络看来是极为特殊的性质,例

① 参考 §7。

② 损耗网络消耗能量,使它变成热、电波、声波等其他种类的能量散发出来。

如图 3.2 的 L, C 的无限网络, 它可以在某个频率范围上与纯电阻具有同一性质。再有, 一般任意的无源线性二端网络 (参考下一项) 也有含分布参数的元件, 对于它们往往存在由两个 LC 无限网络组合成的等效网络。其他各种有趣的问题很多, 但在本书中都省略了。

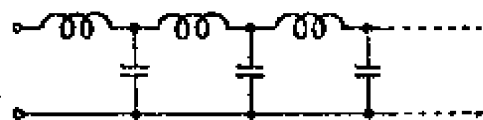


图 3.2

8) 端子数目上的分类 按照与外部联接的端子数目, 网络又可分为二端网络、三端网络、四端网络、... 等等, 三端以上的网络统

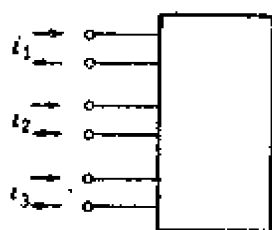


图 3.3

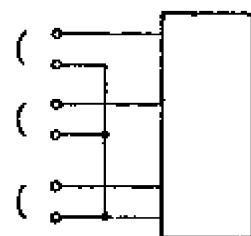


图 3.4

称为多端网络。一个网络 and 外部联接至少需要两个端子, 通过这两个端子的电流是大小相等方向相反的。实际上使用的多端网络多半如图 3.3 所示, 各个端子都是两两成对, 各对的两个电流是大小相等方向相反。这种网络称为**传输多端网络**, 否则称为**完全多端网络**。完全多端网络之中, 如果如图 3.4 能分出一个端子, 其他的端子和它构成各个对, 那末也可以作为传输多端网络来考虑。传输多端网络不仅在实际上使用较多, 并且由于理论上这种形式比较方便,

所以下面谈到多端网络, 就是指这一种。

§4 线性网络的性质

1) 脉冲响应 这一节讨论的内容, 与网络内部构造无关, 只是建立输入和输出之间的关系。首先, 我们作一个假定。即网络在无限过去是绝对静止的。当然, 在无限过去, 输入也必须为零。这个假定使网络的初始条件简单地成为一个, 而不必一一说明, 处理起来就比较方便。以后, 也可以考虑无限过去不为零的信号, 但限于以零为极限的情况。

現在設 $i(t)$ 为輸入, $v(t)$ 为輸出。这个 $i(t)$ 和 $v(t)$ 究竟表示电流或电压是沒有区别的。更广泛地說, 也可代表速度和力那样的一般物理变量, 主要是表示原因和結果两个量。

首先, 由于网络是綫性的, 对于輸入 $i_1(t), i_2(t), \dots$, 若輸出是 $v_1(t), v_2(t), \dots$, 則对于輸入

$$i(t) = \sum a_\nu i_\nu(t),$$

輸出成为

$$v(t) = \sum a_\nu v_\nu(t).$$

这还能够推广到連續参数, 对于

$$i(t) = \int a(\tau) i_\tau(t) d\tau, \quad (4.1)$$

輸出可写成

$$v(t) = \int a(\tau) v_\tau(t) d\tau. \quad (4.2)$$

利用这个关系和适当的函数集 $i_\tau(t)$, 如果能求出輸出 $v_\tau(t)$, 則对于任意的輸入 $i(t)$, 由上式求出展开系数 $a(\tau)$ 后, 就能計算輸出。就是說, 网络的輸入和輸出的关系, 被一系列的函数 $i_\tau(t)$ 和 $v_\tau(t)$ 規定出来。

这里注意网络的不变性。对于 $i(t)$ 如果輸出是 $v(t)$, 則由于輸入为 $i(t-\tau)$ 时輸出为 $v(t-\tau)$, 所以上述的 $i_\tau(t)$ 如果是在時間 t 上平移, 那末相应的輸出函数也只是在時間上作了一个平移。于是只要有一个輸入和輸出关系就完全規定了全部关系。最方便的輸入函数是脉冲函数。脉冲函数 $\delta(t)$ 的定义: 对于任意的正的 ε , 都有

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1. \quad (4.3)$$

利用这个定义, 任意的函数就可表成

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i(\tau) \delta(t-\tau) d\tau.$$

亦就是,如果取展开系数为 $i(\tau)$ 本身,对于 $\delta(t)$, 輸出为 $k(t)$, 則

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i(\tau) k(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} i(t-\tau) k(\tau) d\tau. \quad (4.4)$$

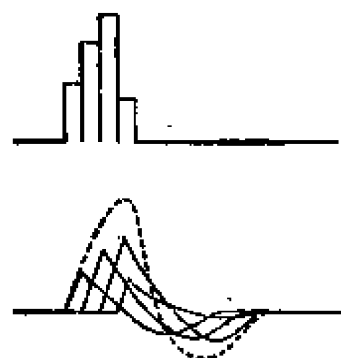


图 4.1

在图 4.1 內, 考虑輸入 $i(t)$ 是由許多窄脉冲合成, 并且輸出由各个脉冲的輸出所合成。这个 $k(t)$ 通常称为**脉冲响应**①。如果因果律成立, 則結果不能比原因在先, 但最初假定无限过去时网络处在靜止状态, 故必須有

$$k(t) = 0 \quad (t < 0). \quad (4.5)$$

因此, (4.4) 的积分范围变成 $(-0, \infty)$. (以下为了简单起见, 把 -0 简单地写成 0.)

在网络中, 通常还要求知道**稳定的条件**。简单地說, 就是对于有限的輸入, 不能出現无限大的輸出。比較严格地說, 就是对于一个正常数 M_1 , 如果

$$|i(t)| < M_1 \quad (t < t_0),$$

則存在另一个常数 M_2 ,

$$|v(t)| < M_2.$$

在不稳定的网络中, 只要有象杂音那样的微小信号, 就可使輸出变成无限大, 作为傳輸网络, 这是不适用的。

网络为稳定的必要和充分条件是

$$\int_0^{\infty} |k(t)| dt < \infty. \quad (4.6)$$

实际的无源网络都是損耗性的, 根据能量原理它們总是稳定的。理想的电抗网络不滿足这个条件。可是, $i(t)$ 若为連續函数, 对于任意的正的 σ , 如果

① $k(t)$ 可以用积分 $h(t)$ 代替, 則表成 $v(t) = \int i(t-\tau) dh(\tau) = \int h(t-\tau) di(\tau)$.

$h(t)$ 为对于单位阶跃函数的响应, 叫作过渡导納 (indicial admittance).

$$|i(t)| < M_1 e^{\sigma t} \quad (t < t_0),$$

則存在一个 M_2 ,

$$|v(t)| < M_2 e^{\sigma t},$$

这是准稳定的情况。

2) 正弦波和頻率特性 作为(4.1)的函数,比較简单的一个是正弦波。可是,即使是正弦波,也有 $\sin \omega t$ 或 $\cos \omega t$ 的形式,不很方便,所以通常取复数形式

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t, \quad (4.7)$$

实际的信号是它的实部,或者考虑 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$ 同时存在更为方便。可是,对于 $e^{j\omega t}$, 根据(4.4), 輸出是

$$v(t) = \int_0^\infty e^{j\omega(t-\tau)} k(\tau) d\tau = K(j\omega) e^{j\omega t},$$

其中

$$K(j\omega) = \int_0^\infty k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.8)$$

对于 $e^{j\omega t}$ 的实部的輸出,即实际的輸出,就是这个 $v(t)$ 的实部。

但由于

$$K(j\omega) e^{j\omega t} = |K(j\omega)| e^{j(\omega t + \theta)},$$

其中

$$\theta = \arg K(j\omega),$$

所以对于正弦波,輸出仍是正弦波,只是幅度是輸入的 $|K(j\omega)|$ 倍,相位移动了 θ 。这是綫性网络的特征,这个 $K(j\omega)$ 称为**頻率特性**, $|K(j\omega)|$ 称为**幅度特性**, $\arg K(j\omega)$ 称为**相位特性**。由于(4.8)即是所謂 Fourier 变换式,按照 Fourier 反变换,由 $K(j\omega)$ 便能得出脉冲响应。

$$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.9)$$

現在就能对任意輸入信号 $i(t)$ 求輸出,假定

$$\int_{-\infty}^{\infty} i(t)^2 dt < \infty,$$

取 Fourier 变换

$$I(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt,$$

即

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

則輸出變成

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

或者,若將 $v(t)$ 的 Fourier 变换写成 $V(j\omega)$, 則

$$V(j\omega) = K(j\omega) I(j\omega). \quad (4.10)$$

这个式子,代替了輸入和輸出的時間函数,以頻率函数的形式表出了此时的关系。和(4.4)式相比,它是用信号的頻率分量来处理信号,这就把問題簡化了。

3) 傳达函数 上一节內考虑了对于正弦波的輸出,也可以进一步考虑依指数函数增大的正弦波。即設 $\lambda = \sigma + j\omega$ (它叫作复数頻率),取輸入为

$$e^{\lambda t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t), \quad (4.11)$$

对它求輸出,

$$v(t) = K(\lambda) e^{\lambda t}, \quad (4.12)$$

其中

$$K(\lambda) = \int_0^{\infty} k(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau. \quad (4.13)$$

这个 $K(\lambda)$ 是上一节的 $K(j\omega)$ 在复变函数上的推广,它叫作**傳达函数**。上式就是所謂 Laplace 变换式,如果在某个 λ_0 收敛,則对于 $\text{Re} \lambda > \text{Re} \lambda_0$ 的 λ 也是收敛的,在这个区域上,它是正則函数。如果网络是稳定的,則由于在 $\lambda = 0$ 时绝对收敛,所以在域 $\text{Re} \lambda \geq 0$ 上,即在复数 λ 平面的右閉半平面^①內,这是一个正則函数。 $K(\lambda)$

① 右半平面再加上虛軸叫作右閉半平面。

的正則性,使 $k(\tau)$ 对于負的 τ 都成为零,就是說基于因果律的。

可是已經讲过,純电抗网络必定不满足稳定条件。但若有一个无源网络,对它加入一个依指数增大的正弦波,則輸出必然是确定的。亦就是說,“无源网络的传达函数在右半平面上是单值正則的”。一般也能把传达函数解析开拓到(4.13)式不收敛的区域,可是应注意,在这个区域上函数已不是单值的了,但无论如何,传达函数在整个平面上除一些奇点外都是有定义的。对于具有左半平面內复数频率的信号,由于在无限过去时具有无穷大的振幅,不满足最初所述的假定,所以不能用它来进行討論。

在左半平面內,如果有(4.13)式的收敛域,則可得出(4.12)式所示的輸出,但对于不收敛区域的輸入,輸出一定不存在。在某一时刻,若能选择以(4.11)式表示的輸出状态,則在以后通常也得出同样的輸出,如果在最初稍为差一点,則誤差的比例一般将随時間而增大。在这个意义上讲,对于这样的輸入,考虑无限过去是没有意义的。

4) 实部与虚部的关系 为了表示网络的傳輸特性,如果有脉冲响应,那末只要一个实函数 $k(t)$ 就可以解决,表成频率特性 $K(j\omega)$ 时,虽然需要实部和虚部两个函数,但事实上,由于这两个函数是一个解析函数的实部和虚部,它們彼此不是独立的①。

現在設

$$K(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega), \quad (4.14)$$

則

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega. \end{aligned}$$

由于 $t < 0$ 时 $k(t) = 0$, 所以右边兩項相等。因此在 $t > 0$ 时,可写出

$$k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (4.15)$$

① 这个问题可参考第6章§29位論的应用,且与流体力学、静电学等二維問題有密切的关系。此外,可参考文献[17]。

又从(4.8)式的实部和虚部可得

$$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= \int_0^{\infty} k(t) \cos \omega t dt, \\ X(\omega) &= -\int_0^{\infty} k(t) \sin \omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

再把以上的 $k(t)$ 代入上式, 得出

$$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u}{u^2 - \omega^2} X(u) du + R(\infty), \\ X(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{u^2 - \omega^2} R(u) du. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

其中积分是取主值。或者为了把极点除去, 可写成

$$X(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{u^2 - \omega^2} \{R(u) - R(\omega)\} du. \quad (4.18)$$

如果再令变量为 $x = \log(u/\omega)$, 则得

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dR}{dx} \log \coth \frac{|x|}{2} dx. \quad (4.19)$$

这里 $\coth |x/2|$ 亦可看成 $|(u+\omega)/(u-\omega)|$, 所以上式说明在 $u=\omega$ 附近特别加重 dR/dx 的影响。因此大致地说, R 倾斜大的地方 X 也大。同样可得

$$R(\omega) - R(\infty) = -\frac{1}{\pi\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega X)}{dx} \log \coth \frac{|u|}{2} du. \quad (4.20)$$

这种关系一般对于右闭半平面内正则的函数常是适用的, 对于以后要讲的传输量函数(即传达函数的对数再取相反符号的函数), 以及传达函数, 如果它们在右闭半平面内既没有零点也没有极点, 则因它们在右闭半平面内是正则的, 所以这种关系仍能成立。

为了参考起见, 我们还写出由正则性求此关系的方法。在右半平面内, 由于 $K(\lambda)$ 是正则的, 根据 Cauchy 定理, 对于右半平面内的 λ , 下式是成立的:

$$K(\lambda) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{K(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi + \frac{K(\infty)}{2}. \quad (4.21)$$

但 $-\lambda$ 在左半平面内,

$$0 = -\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{K(\xi)}{\xi + \lambda} d\xi + \frac{K(\infty)}{2},$$

因此得到

$$K(\lambda) = \frac{1}{\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\lambda K(\xi)}{\lambda^2 - \xi^2} d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda R(u)}{\lambda^2 + u^2} du. \quad (4.22)$$

由此作出

$$\frac{1}{2} \{K(\lambda) - \overline{K(\lambda)}\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\lambda R(u)}{\lambda^2 + u^2} - \frac{\bar{\lambda} R(u)}{\bar{\lambda}^2 + u^2} \right\} du,$$

設 $\lambda \rightarrow j\omega$, 則取积分的主值, 右边正好和(4.17)的第二式一致。对于第一个式子, 同样也能用这种方法导出。

第2章 二端网络

§5 阻抗和导纳

具有两个端子的二端网络，它的两个端子间的电流 I 和电压 V 的关系是完全确定的。这两者，无论哪一个都可以考虑作为输入。在把电流作为输入时，传达函数

$$Z(\lambda) = \frac{V}{I} \quad (5.1)$$

叫做阻抗，而把电压作为输入时，传达函数

$$Y(\lambda) = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z(\lambda)} \quad (5.2)$$

叫做导纳。或者，为了与以后的传输阻抗和传输导纳区别起见，可分别称它们为策动点阻抗和策动点导纳。

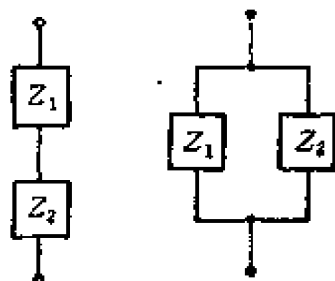


图 5.1

图 5.2

将两个二端网络作如图 5.1 那样的联接，合成的二端网络的阻抗就是

$$Z = Z_1 + Z_2. \quad (5.3)$$

这样的联接称为串联。若将两者作如图 5.2 那样的联接，则

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (5.4)$$

这种联接称为并联。由串联和并联作成的电路的阻抗，可以反复利用以上的演算，简单地求出来。但对于一般的网络，可以利用 Kirchhoff 的两个法则算出。于是，合成网络的阻抗可以表成各个部分网络阻抗的有理式（参考 §7）。如果部分网络不是二端网络，那末考虑以后要讲的传输阻抗，也有同样的结果。这样，合成网络的网络函数就简单地表成了频率的函数，这是一个很大的方便，但

对于脉冲响应那样的时间函数,作这种表示是不可能的。

§ 6 基本元件

网络元件的种类有很多,从理论上,特别从综合的观点来看,各种各样的元件全都考虑并不合适。最好是将各种性质理想化,选择综合上十分必要的种类,尽量做到与实际接近。这样的元件有下列四种。

(i) **电阻** 这是完全消耗所加能量的、没有存储能力的元件,各时刻的输出完全被该时刻的输入所规定。即

$$v(t) = Ri(t),$$

由此得出

$$Z(\lambda) = R \quad (\text{实常数}). \quad (6.1)$$

电阻的记号如图 6.1 所示。

图 6.1



(ii) **线圈** 这是不消耗能量的、能存储电流的元件①,即存储的能量仅是电流的函数。亦就是

$$W = \int v i \, dt = Li^2/2,$$

对 t 导微,可得

$$v = L \frac{di}{dt}$$

的关系。系数 L 称为**电感**。若取 $i = e^{\lambda t}$, 则直接可得此时的阻抗为

$$Z(\lambda) = \lambda L. \quad (6.2)$$

线圈的记号通常如图 6.2 所示。

(iii) **电容器** 这是存储电压②的元件。

$$i = C \frac{dv}{dt},$$

① 正确地說,是存储磁能。

② 正确地說,是存储静电能。



图 6.2

这个系数 C 称为电容。

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\lambda C}. \quad (6.3)$$

它的记号通常如图 6.3。

(iv) **理想变压器** 这是不消耗也不存储能量的只起变换作用的四端元件。在图 6.4 内, 它的性质由下列关系所规定:

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= nV_1, \\ I_2 &= \frac{1}{n} I_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

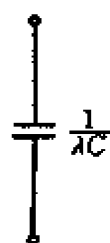


图 6.3

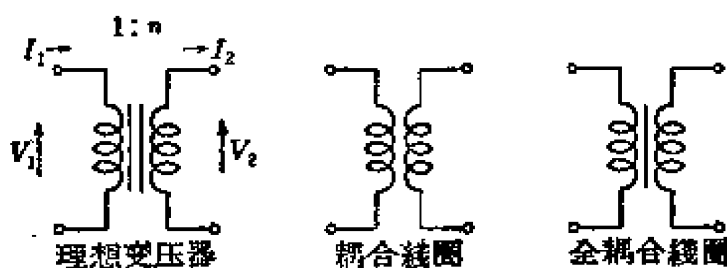


图 6.4

此外, 还有耦合线圈。它的性质是

$$E = \frac{1}{2} L_1 \dot{i}_1^2 + M \dot{i}_1 \dot{i}_2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{i}_2^2,$$

亦就是, 可以表成

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \lambda L_1 I_1 + \lambda M I_2, \\ V_2 &= \lambda M I_1 + \lambda L_2 I_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

M 称为互感, 由于 E 必须大于零, 所以有下列的关系:

$$M^2 \leq L_1 L_2. \quad (6.6)$$

特别在等式成立的情况下, 叫作全耦合线圈, 如图 6.4 所示。理想变压器就是除满足 $L_2/L_1 = n^2$ 的条件外, L_1, L_2 和 M 都趋于无穷大时的全耦合线圈。另一方面, 全耦合线圈也可以用图 6.5 的理想变压器和电感的等效电路表示出来。

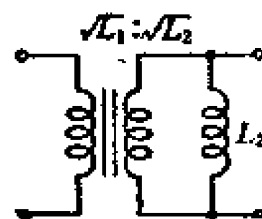


图 6.5

§3 内叙述的集中参数元件就是这四种基

这种式子叫做**回路方程**。反之,若以各节点的电位作为未知数,根据第一法则列出方程,则可得到一组在上式中以 V 置换 I , 以 I 置换 V , 以 y 置换 z 的方程。它叫作**节点方程**。根据网络的形式,哪一种方程方便就可选用哪一种。

(7.1) 中的 z_{ij} , 是第 i 闭路和第 j 闭路公共的阻抗, 它的符号当 I_i 和 I_j 同方向时为正, 反之为负。它可以写成下列形式:

$$z_{ij} = \lambda L_{ij} + R_{ij} + \frac{1}{\lambda C_{ij}}. \quad (7.2)$$

两个闭路之间有互感时, 它们被包含在 L_{ij} 中。此时 $z_{ij} = z_{ji}$ 的关系仍旧成立。 z_{ii} 为第 i 闭路的全部阻抗。如果解出 (7.1) 式内的 I_1 , 就可求得接有电源的端子间的二端阻抗:

$$Z(\lambda) = \frac{V}{I_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}, \quad (7.3)$$

其中 Δ 是系数 z_{ij} 的行列式, Δ_{11} 是关于 z_{11} 的子行列式, 且设 $\Delta_{11} \neq 0$ 。由此可知, $Z(\lambda)$ 是 λ 的有理函数。

§8 能量原理和正实函数

对于无源网络, 除了因果律以外, 还要加入能量原理的约束条件。现在看它在二端网络函数上要求有什么样的性质。

从无限过去 $t=0$ 时到时刻 t , 加入到二端网络中的全部能量是

$$E = \int_{-\infty}^t v i \, dt,$$

对于无源网络, 它不能变成负数。设 $\lambda = \sigma + j\omega$ ($\sigma > 0$), 现在考虑这种复数频率的信号。由于上式不是线性的, 所以 v 和 i 不能仍用复数形式, 必须采用实函数。这里取

$$i(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t$$

以及

$$v(t) = |Z(\lambda)| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta),$$

其中

$$\theta = \arg Z(\lambda).$$

于是

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |Z(\lambda)| e^{2\sigma t} \cos \omega t \cos(\omega t + \theta) dt \\ &= \frac{|Z(\lambda)| e^{2\sigma t}}{2\omega} \left\{ \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \cos(2\omega t + \theta + \varphi) + \cos \theta \right\}, \quad (8.1) \end{aligned}$$

为了不使它变成负, 必须有

$$\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \leq \cos \theta, \quad (8.2)$$

也可把它写成

$$|\arg \lambda| \geq |\arg Z(\lambda)|. \quad (8.3)$$

由于 $\sigma = \operatorname{Re} \lambda > 0$, 故 $|\arg \lambda| < \pi/2$. 于是由上式, $\operatorname{Re} Z(\lambda) > 0$. 这种函数称为正实函数。即

定义 具有下列性质的函数 $Z(\lambda)$ 叫作正实函数:

- (i) λ 为实数时, $Z(\lambda)$ 为实数;
- (ii) 对于 $\operatorname{Re} \lambda > 0$ 的 λ , $Z(\lambda)$ 是正则的;
- (iii) 对于 $\operatorname{Re} \lambda > 0$ 的 λ , $\operatorname{Re} Z(\lambda) \geq 0$.

定理 1 阻抗函数是正实函数。

但由于集中参数网络的阻抗是有理函数, 所以下面只限于讨论有理函数。

限定为有理函数, 定义亦变得简单了。

定义 具有下列性质的函数 $Z(\lambda)$ 叫作正实函数:

- (i) $Z(\lambda)$ 为实系数的有理函数;
- (ii) $\operatorname{Re} \lambda > 0$ 时 $\operatorname{Re} Z(\lambda) \geq 0$.

定理 2 $Z(\lambda)$ 为正实函数的必要和充分条件是

- (i) $Z(\lambda)$ 为有理函数;
- (ii) $\operatorname{Re} \lambda > 0$ 时 $|\arg Z(\lambda)| \leq |\arg \lambda|$.

这两个条件的充分性是很明显的,但必要性的数学证明比较困难。这可以用(8.1)式所述的能量原理作物理的证明^①。

正实函数在右半平面内正则,但在虚轴上可能有极点。可是,

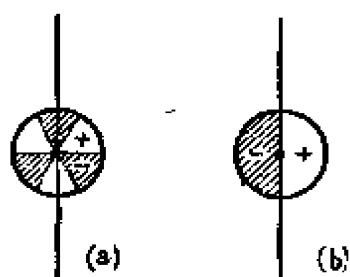


图 8.1

虚轴上的极点必须是一阶的。这是因为例如考虑一个三阶的极点 $a(\lambda - j\omega_0)^{-3}$, 在 $j\omega_0$ 附近它的实部的符号如图 8.1(a) 所示, 不管如何选择常数 a , 在右半平面内, 总有实部为负的区域, 但在一阶的情况下, 如果留数是正数, 那末如图 8.1(b) 所示,

实部为负的区域都可以进入左半平面内。由此得出下面的定理。

定理 3 $Z(\lambda)$ 为正实函数的必要和充分条件是

- (i) $Z(\lambda)$ 为实系数有理函数;
- (ii) $\operatorname{Re} \lambda > 0$ 时 $Z(\lambda)$ 是正则的;
- (iii) 在虚轴上, $\operatorname{Re} Z(\lambda) \geq 0$;
- (iv) 虚轴上的极点是一阶的, 它的留数是正数。

条件 (iv) 可以改成下列条件:

- (iv') 虚轴上的零点是一阶的, 它的一阶导数是正数。

以上用各种形式叙述了正实函数的条件, 正实函数主要是把右半平面映射到右半平面内部区域的实系数有理函数。由此, 下列定理是显而易见的。

定理 4 正实函数的正实函数, 仍为正实函数。

这个定理将成为 § 31 的频率变换的原理。

系 正实函数的倒数为正实函数。

已经讲过, 导纳当然也是正实函数, 所以这是可以理解的。

定理 5 正实函数之和为正实函数。

^① 例如 R. Nevanlinna: Eindeutige Analytische Funktionen (Julius Springer, Berlin, 1936),

其次考虑 $Z(\lambda)$ 在虚轴上点 $j\omega_0 (\neq 0, \infty)$ 处为纯虚数的情况。在附近一点 $\Delta\sigma + j\omega_0$ 上, $Z = \Delta r + jx_0$, 由 (8.3) 可得 $\frac{|x_0|}{\Delta r} \leq \frac{|\omega_0|}{\Delta\sigma}$, 考虑它的极限, 则得出 $\left| \frac{x_0}{\omega_0} \right| \leq \frac{\partial r}{\partial \sigma}$. 但因为在右半平面内 Z 是正则的, 满足 Cauchy-Riemann 关系

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \omega}.$$

于是

$$\left| \frac{x_0}{\omega_0} \right| \leq \frac{\partial x}{\partial \omega}.$$

亦即得出

定理 6 如果正实函数 $Z(\lambda)$ 在虚轴上的正则点 $j\omega_0 (\neq 0, \infty)$ 处是纯虚数, 则

$$\left\{ \frac{dZ(\lambda)}{d\lambda} \pm \frac{Z(\lambda)}{\lambda} \right\}_{\lambda=j\omega_0} \geq 0. \quad (8.4)$$

等号只在 $Z(\lambda) = L\lambda$ 或 $Z(\lambda) = 1/C\lambda$ 时成立 (L 和 C 是正的常数)。同样有

定理 7 若 $Z(\lambda)$ 是正实函数, 则对于正实数 λ ,

$$\frac{Z(\lambda)}{\lambda} \pm \frac{dZ(\lambda)}{d\lambda} \geq 0. \quad (8.5)$$

等号只在 $Z(\lambda) = L\lambda$ 或 $Z(\lambda) = 1/C\lambda$ 时成立。

由此得到下列关系:

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{Z(\lambda)}{\lambda} \right\} \leq 0, \quad \frac{d}{d\lambda} \{ \lambda Z(\lambda) \} \geq 0, \quad (8.6)$$

于是又得到下一个定理。

定理 8 若 $Z(\lambda)$ 为正实函数, $Z(0) \neq 0$, $Z(\infty) \neq \infty$, 则对于任意的正数 L , 常存在一个并且只有一个 λ 的正实根, 满足

$$Z(\lambda) = \lambda L.$$

其次, 考虑虚轴上有极点的情况, 由于 $Z(\lambda)$ 是实系数的函数, 如果 $j\omega_1$ 是一个极点, $-j\omega_1$ 必须也是极点。取这种极点的主部, 成为

$$\frac{h_1}{\lambda - j\omega_1} + \frac{h_1}{\lambda + j\omega_1} = \frac{2h_1\lambda}{\lambda^2 + \omega_1^2} \quad (h_1 > 0). \quad (8.7)$$

特别当极点在原点和无穷远点的情况下, 它们分别为

$$\frac{h_0}{\lambda}, \quad h_\infty \lambda \quad (h_0, h_\infty > 0).$$

由于它们在整个虚轴上是纯虚数, 所以把它们从 $Z(\lambda)$ 中减去, 剩下的仍为正实函数。这样可以导出一个在虚轴上没有极点的正实函数。我们称这种函数为最小电抗型的。

如果 $Z(\lambda)$ 的实部在虚轴上的最小值是 R_0 , 则 $Z(\lambda) - R_0$ 仍是正实函数。我们称它为最小电阻型的。

根据 §4 所述, 虚轴上没有极点的正实函数完全由它在虚轴上的实部所决定。亦就是若 $Z(j\omega)$ 的实部为 $R(\omega)$, 则

$$Z(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda R(\omega)}{\lambda^2 + \omega^2} d\omega \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0). \quad (8.8)$$

可是, 它的被积函数完全和 (8.7) 式同一形式。这意味着 $Z(\lambda)$ 可表成虚轴上连续的极点分布的形式, 亦暗示它可以实现成电抗的无限网络。这种表达还可写成如下的 Stiltjes 积分形式, 推广到虚轴上含有极点的情况。

$$Z(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda d\Phi(\omega)}{\lambda^2 + \omega^2} \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0). \quad (8.9)$$

$Z(\lambda)$ 为有理函数时, 考虑偶部比考虑实部更方便。即考虑

$$G(\lambda) = \{Z(\lambda) + Z(-\lambda)\}/2, \quad (8.10)$$

且有

$$G(j\omega) = R(\omega). \quad (8.11)$$

这里可以举出下列的定理。

定理 9 $G(\lambda)$ 为正实函数的偶部的必要和充分条件是

- (i) $G(\lambda)$ 为实系数偶有理函数;
- (ii) 虚轴上没有极点;
- (iii) 虚轴上 $G(\lambda) \geq 0$.

这里不去证明它了。但 $G(\lambda)$ 是有理函数, 所以求 $Z(\lambda)$ 时也可不采用 (8.8) 的积分, 而将 $G(\lambda)$ 展成部分分式, 分开左右半平

面的极点,

$$G(\lambda) = \sum \frac{h_\nu}{\lambda + \lambda_\nu} + \sum \frac{-h_\nu}{\lambda - \lambda_\nu} + R_0 \quad (\operatorname{Re} \lambda_\nu > 0), \quad (8.12)$$

于是就可简单地求出 $Z(\lambda)$:

$$Z(\lambda) = \sum \frac{2h_\nu}{\lambda + \lambda_\nu} + R_0. \quad (8.13)$$

下面我们来讲与正实函数有重要关系的 S 函数。

定义 $Z(\lambda)$ 为正实函数时, 作线性变换后的函数

$$S(\lambda) = \frac{Z(\lambda) - R}{Z(\lambda) + R} \quad (R \text{ 为正的实常数}) \quad (8.14)$$

称为 S 函数^①。反之, $Z(\lambda)$ 可表成

$$Z(\lambda) = R \frac{1 + S(\lambda)}{1 - S(\lambda)}. \quad (8.15)$$

由这两个式子可知,

$$\operatorname{Re} Z(\lambda) \geq 0 \quad \text{和} \quad |S(\lambda)| \leq 1$$

是完全相当的条件。因此得到

定理 10 一个实系数有理函数 $S(\lambda)$ 为 S 函数的必要和充分条件是:

$$\text{对于 } \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad |S(\lambda)| \leq 1.$$

还有,

定理 11 一个实系数有理函数 $S(\lambda)$ 为 S 函数的必要和充分条件是:

- (i) 在右半平面内正则;
- (ii) 在虚轴上, $|S(j\omega)| \leq 1$.

由此很容易证明下列的定理。

定理 12 S 函数 $S(\lambda)$ 若在正实轴上一点 λ_0 处有一个零点, 则

^① 它相当于第二篇中一阶的 S 矩阵。

$$S_1(\lambda) = \frac{\lambda + \lambda_0}{\lambda - \lambda_0} S(\lambda) \quad (8.16)$$

也是 S 函数, 特别当 $-\lambda_0$ 是 $S(\lambda)$ 的极点时, $S_1(\lambda)$ 比 $S(\lambda)$ 次数低一次。

定理 13 S 函数 $S(\lambda)$ 若在右半平面内有零点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ (复数零点以共轭对出现), 则

$$S_1(\lambda) = \frac{\prod_{\nu=1}^t (\lambda + \lambda_{\nu})}{\prod_{\nu=1}^t (\lambda - \lambda_{\nu})} S(\lambda) \quad (8.17)$$

仍为 S 函数, 如果 $S(-\lambda_{\nu}) = \infty$ ($\nu=1, 2, \dots, t$), 则 $S_1(\lambda)$ 比 $S(\lambda)$ 低 t 次。

可是, 由此还可得到下列关系:

$$S_1(\lambda) S_1(-\lambda) = S(\lambda) S(-\lambda). \quad (8.18)$$

如果 $S_1(\lambda)$ 或 $S(\lambda)$ 各用 (8.15) 的 $Z_1(\lambda)$ 或 $Z(\lambda)$ 代替, 则可得出与定理 12 和 13 对应的下列定理。

定理 14 (Richards 定理) ① 设 $Z(\lambda)$ 是正实函数, λ_0 为一个正的实数, 则

$$Z_1(\lambda) = Z(\lambda_0) \frac{\lambda Z(\lambda) - \lambda_0 Z(\lambda_0)}{\lambda Z(\lambda_0) - \lambda_0 Z(\lambda)} \quad (8.19)$$

仍为正实函数, 特别在

$$Z(\lambda_0) + Z(-\lambda_0) = 0$$

时, $Z_1(\lambda)$ 比 $Z(\lambda)$ 低一次, 否则是同一次数。

定理 15 设 $Z(\lambda)$ 是正实函数, 在右半平面内 t 个点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ 上 (若有复数点, 则必须包含它的共轭复数点),

$$Z(\lambda_{\nu}) = C \quad (\nu=1, 2, \dots, t) \quad (C \text{ 为正的实常数}),$$

则取

① 参阅 Richards, P. I., A special class of functions with positive real part in a half plane, Duke Math. J., 14 (1947), 777~786. —译者注

$$Z_0(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^t (\lambda + \lambda_{vi})}{\prod_{i=1}^t (\lambda - \lambda_{vi})} \quad (8.20)$$

时,

$$Z_1(\lambda) = C \frac{Z_0(\lambda) Z(\lambda) - C}{C Z_0(\lambda) - Z(\lambda)} \quad (8.21)$$

仍为正实函数,在 t 个点之中,若在 r 个点上 $Z(\lambda)$ 的偶部等于零,则 $Z_1(\lambda)$ 比 $Z(\lambda)$ 低 r 次。

这里 $Z_1(\lambda)$ 的偶部 $G_1(\lambda)$ 由下式表出:

$$2G_1(\lambda) = C^2 \frac{\{Z_0(\lambda)^2 - 1\} \{Z(\lambda) + Z(-\lambda)\}}{\{C Z_0(\lambda) - Z(\lambda)\} \{C Z_0(\lambda) + Z(-\lambda)\}}.$$

把这个式子的分子和分母的公因子除去, $G_1(\lambda)$ 的零点就是 $Z(\lambda)$ 的偶部的零点,所以知道可以尽量与上记的 λ_v 相一致。

§ 9 倒置网络和补置网络

正实函数的倒数仍是一个正实函数,所以若给定一个二端网络,它的阻抗设为 $Z(\lambda)$,则与它相当的,以 $R_0^2/Z(\lambda)$ 为阻抗的二端网络必定存在。它称为原来网络的倒置网络。

由(5.3)和(5.4)知道,原来网络的串联对应于倒置网络的并联,并联对应于串联。对于只由串联和并联所构成的网络,把各个串联换成并联,并联换成串联,在元件上,把电阻换成电阻,电感换成电容,电容换成电感,则就可得到倒置网络。在不是串联和并联,但能在平面画成不交叉的结构的情况,倒置网络也可用下述方法简单地求出。考虑到网络方程有回路方程和节点方程,把回路换成节点就可得到倒置网络。例

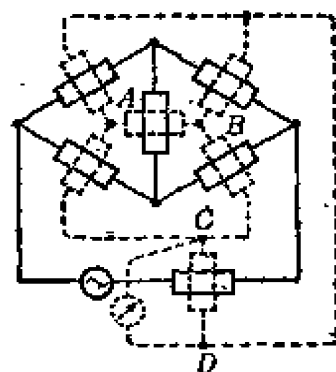


图 9.1

如在图 9.1 内,各个回路内和外部平面上分别放一个点 A, B, C

和 D ，在这些点之間联接两回路公共支的倒量网络，就可得到整个网络的倒量网络。

对于含有互感的，或不能画在一个平面上的网络，虽然无法求出直接的网络结构，但倒量网络总是存在的。

倒量网络是它的阻抗和原来的阻抗之积为定值的网络，与之相对的，阻抗和原来阻抗之和为定值的网络，叫做补量网络。补量网络不一定存在。它的存在条件是虚轴上没有极点，且和数之值不能比虚轴上实部的最大值为小。显然这个条件是必要的。下面证明这条件也是充分的。现设所给的阻抗在虚轴上的实部为 $R_1(\omega)$ ，和为 R_0 ，则利用由

$$R_1(\omega) + R_2(\omega) = R_0 \quad (9.1)$$

规定的函数 $R_2(\omega)$ ，由于它不成为负，就可取它为实部作出虚轴上没有极点的一个阻抗。这个阻抗和原来阻抗之和在虚轴上没有极点，它的实部在虚轴上是一定的。因此，阻抗之和本身必须是一个常数电阻。这样得出的网络就是补量网络。

§10 电抗函数

电抗网络是不消耗能量的网络。所以它的阻抗的实部在虚轴上必须等于零。即

$$Z(j\omega) + \overline{Z(j\omega)} = 0.$$

可是， $\overline{Z(j\omega)} = Z(-j\omega)$ ，所以

$$Z(j\omega) + Z(-j\omega) = 0, \quad (10.1)$$

亦就是偶部在虚轴上等于零。根据解析函数的性质，因此在全平面上必须为零。于是 $Z(\lambda)$ 是一个奇函数。这里我们作如下的定义。

定义 正实的奇函数叫作电抗函数。

定理 16 电抗二端网络的阻抗和导纳都是电抗函数。

电抗函数是正实函数,所以必須在右半平面內正則,但由于它是奇函数,所以在左半平面內也必須正則。因此,它的极点只能存在在虛軸上。

于是电抗函数可表成下列形式:

$$Z(\lambda) = \frac{h_0}{\lambda} + \sum_p \frac{2h_p \lambda}{\lambda^2 + \omega_p^2} + h_\infty \lambda. \quad (10.2)$$

这称为部分分式形式。但由于 (8.7) 式可表成图 10.1 的并联共振回路,所以一般的电抗二端网络总可以实现成图 10.2 的形式。同样,若把导納展开成部分分式形式,則成为图 10.3 的形状。

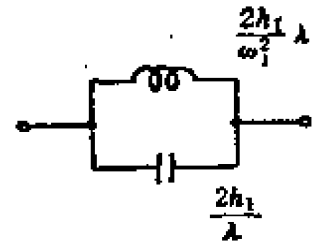


图 10.1

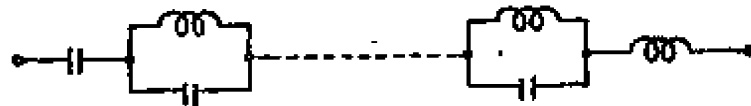


图 10.2

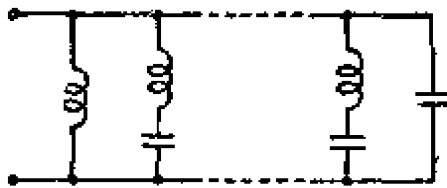


图 10.3

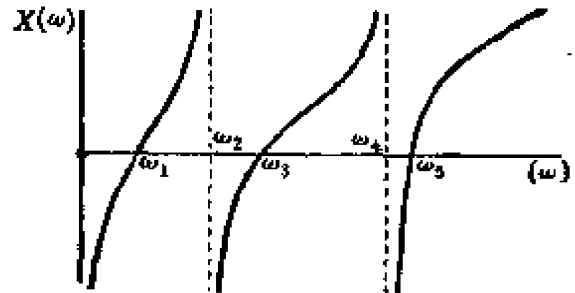


图 10.4

导納的极点只限在虛軸上,所以 $Z(\lambda)$ 的极点和零点都限在虛軸上。这里可換写成

$$Z(j\omega) = jX(\omega), \quad (10.3)$$

但因为由 (8.4) 式, $X(\omega)$ 必須是 ω 的递增函数,所以它的图形如图 10.4 所示。由此知道,在虛軸上, $Z(\lambda)$ 的极点和零点交替地排列着(极点和零点彼此隔离)。因此, $Z(\lambda)$ 可表成下列形式:

$$Z(\lambda) = h \frac{(\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_3^2) \cdots (\lambda^2 + \omega_{2m+1}^2)}{\lambda(\lambda^2 + \omega_2^2) \cdots (\lambda^2 + \omega_{2m}^2)} \quad (0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_{2m} < \omega_{2m+1} < \infty). \quad (10.4)$$

从(10.4)可知,无穷远点总是零点或极点,在 $Z(\lambda)$ 以无穷远点为极点的情况下,如果把它分成

$$Z(\lambda) = a_1\lambda + Z_1(\lambda),$$

则无穷远点就成为 $Z_1(\lambda)$ 的零点。于是对于 $Z_1(\lambda)$ 的倒数,又可分出极点,以下反复这样的操作,可得出

$$Z(\lambda) = a_1\lambda + \frac{1}{\frac{1}{a_2\lambda}} + \frac{1}{\frac{1}{a_3\lambda}} + \cdots + \frac{1}{\frac{1}{a_n\lambda}}, \quad (10.5)$$

各个系数 a_v 都是正数。此外,若对原点的极点进行同样的操作,则

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\frac{1}{b_1\lambda}} + \frac{1}{\frac{1}{b_2\lambda}} + \frac{1}{\frac{1}{b_3\lambda}} + \cdots + \frac{1}{\frac{1}{b_n\lambda}}. \quad (10.6)$$

这称为连分式形式,对于(10.5)式,得出图10.5的实现形式,对于(10.6)式,则得出图10.6。另外,还能对有限频率的极点展开成连分式形式。

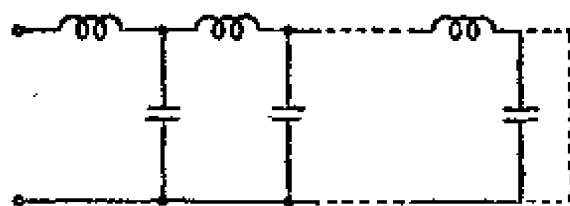


图 10.5

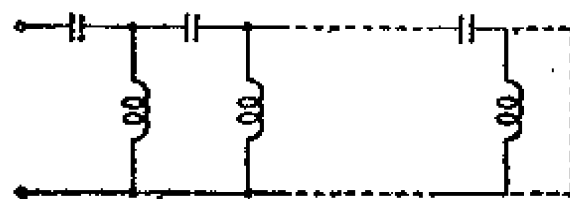


图 10.6

§ 11 Hurwitz 多项式

已经讲过,稳定网络的传递函数在右闭半平面内是正则的。因

此,若它为有理函数,則分母多項式的零点只能在左半平面內。这种多項式就是 Hurwitz 多項式。即

定义 具有下述性质的实系数多項式称为 Hurwitz 多項式:

- (i) 最高次項的系数为正;
- (ii) 所有的零点全在左半平面內。

由于这是实系数的多項式,所以可分解成下面的一次因式或二次因式:

$$\lambda + a, \quad \lambda^2 + 2b\lambda + c.$$

所有的根全在左半平面內,因此, a , b 和 c 都必須是正数。于是有

定理 17 Hurwitz 多項式的系数全是正数。

設 $g(\lambda)$ 为 n 次 Hurwitz 多項式,把它分成偶部和奇部:

$$g(\lambda) = v(\lambda) + u(\lambda), \quad (11.1)$$

現在考虑如下的函数:

$$\varphi(\lambda) \equiv \frac{g(\lambda)}{g(-\lambda)} = \frac{v(\lambda) + u(\lambda)}{v(\lambda) - u(\lambda)}. \quad (11.2)$$

由于 $\varphi(\lambda)$ 的零点分布在左半平面,极点对称地分布在右半平面,所以對於 $\lambda = j\omega$,

$$|\varphi(j\omega)| = 1,$$

λ 在虛軸上由 0 变到 ∞ 时, $\arg\{\varphi(\lambda)\}$ 由 0 单调地增加到 $n\pi$ 。于是 $\varphi(\lambda)$ 交替地取 1 和 -1 之值。但 $\varphi(\lambda) = 1$ 对应于 $u(\lambda) = 0$; $\varphi(\lambda) = -1$ 对应于 $v(\lambda) = 0$, 所以 $v(\lambda)$ 和 $u(\lambda)$ 的零点交替地出现在虛軸上。虛軸以外的地方,沒有零点,这从零点的数目和次数上就立刻知道。因此

$$Z(\lambda) = \frac{v(\lambda)}{u(\lambda)} \quad (11.3)$$

是电抗函数。反之,亦容易証明电抗函数的分母和分子多項式之和是 Hurwitz 多項式。

关于 Hurwitz 多項式,下一个定理是重要的。

定理 18 多项式

$$g(\lambda) = C_0 \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \dots + C_n \quad (11.4)$$

为 Hurwitz 多项式的必要和充分条件是：在 $C_0 > 0$ 时，由这些系数作出的 Hurwitz 矩阵

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_3 & C_5 & C_7 & \dots \\ C_0 & C_2 & C_4 & C_6 & \dots \\ 0 & C_1 & C_3 & C_5 & \dots \\ 0 & C_0 & C_2 & C_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

之中，各个左上角的子行列式

$$D_1 = C_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 \\ C_0 & C_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_5 \\ C_0 & C_2 & C_4 \\ 0 & C_1 & C_3 \end{vmatrix}, \dots \quad (11.6)$$

全都为正。

如果在以上的 Hurwitz 矩阵之左侧和上侧，各添加一列和一行，成为

$$\begin{pmatrix} C_0 & C_2 & \dots \\ 0 & C_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (11.7)$$

则开始写出的条件 $C_0 > 0$ ，也可包括在子行列式的条件内。在这个意义上，

$$D_0 = C_0.$$

这个定理的证明见代数书籍^①，关于这些子行列式，有个方便的公式，即

$$\frac{C_0 \lambda^n + C_2 \lambda^{n-2} + \dots}{C_1 \lambda^{n-1} + C_3 \lambda^{n-3} + \dots} = a_1 \lambda + \frac{1}{a_2 \lambda} + \dots, \quad (11.8)$$

它们和连分式展开中的系数 a_v 有如下的关系：

① 例如藤原，代数学，第1卷，第601，617页。

$$a_\nu = \frac{D_{\nu-1}^2}{D_{\nu-2} D_\nu} \quad (\nu=1, 2, \dots, n), \quad (11.9)$$

其中 $D_{-1}=1$.

最后, 对于 Hurwitz 多项式和正实函数的关系, 我们有下列的定理。

定理 19 $Z(\lambda)$ 为正实函数的必要和充分条件是: 把它的分母和分子分成偶部和奇部:

$$Z(\lambda) = \frac{v_1(\lambda) + u_1(\lambda)}{v_2(\lambda) + u_2(\lambda)}, \quad (11.10)$$

则

$$v_1(\lambda) + v_2(\lambda) + u_1(\lambda) + u_2(\lambda) \quad (11.11)$$

为 Hurwitz 多项式, 在虚轴上

$$v_1(\lambda) v_2(\lambda) - u_1(\lambda) u_2(\lambda) \quad (11.12)$$

不能为负。

证明很简单, 首先, 由于

$$\frac{1}{2} \{Z(\lambda) + Z(-\lambda)\} = \frac{v_1(\lambda) v_2(\lambda) - u_1(\lambda) u_2(\lambda)}{v_2(\lambda)^2 - u_2(\lambda)^2},$$

在虚轴上, $\operatorname{Re} Z(\lambda)$ 不能为负。因此 $\operatorname{Re} \{Z(\lambda) + 1\}$ 也不能为负。另一方面, 根据 (11.11), $Z(\lambda) + 1$ 的分子在右半平面没有零点, 所以由定理 3 和定理 4 的系, 它是一个正实函数。因为 $Z(\lambda)$ 在右半平面正则, 且 $\operatorname{Re} Z(\lambda)$ 不为负, 故 $Z(\lambda)$ 也是正实函数。

§ 12 RL 和 RC 网络

电抗二端网络仅由线圈和电容器组成, 这种只由两种元件组成的网络称为两元件网络。此外, 也有只由电阻和线圈组成的网络以及只由电阻和电容器组成的网络。它们通常叫做“ RL 网络”和“ RC 网络”^①。

① 参考第 7 章。

現在考虑一个 RL 网络。对于这个网络，如果把所有的 R 全用 C 替换，作出另一个网络，则两者的回路方程分别为

$$\left. \begin{aligned} \sum (\lambda L_{ij} + R_{ij}) I_j &= V_i, & (V_i = V'_i = 0, i \geq 2), \\ \sum \left(\lambda L_{ij} + \frac{1}{\lambda C_{ij}} \right) I'_j &= V'_i, & \left(\frac{1}{C_{ij}} = R_{ij} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

后者可写成

$$\sum \left(\lambda^2 L_{ij} + \frac{1}{C_{ij}} \right) I'_j = \lambda V'_i. \quad (12.2)$$

由于左边的系数是 λ^2 的有理式，所以解出它以后，便成为

$$I'_1 = F(\lambda^2) \cdot \lambda V'_1, \quad Z'(\lambda) = \frac{1}{\lambda F(\lambda^2)}.$$

这当然是电抗函数。比较(12.1)的上一个式子和(12.2)式，可知

$$I = F(\lambda) V_1, \quad Z(\lambda) = \frac{1}{F(\lambda)}.$$

就是说， RL 网络的阻抗是电抗函数在把 λ^2 换成 λ 后的 λ 倍。因此写出

$$\begin{aligned} Z(\lambda) &= H \frac{(\lambda + \sigma_1)(\lambda + \sigma_3) \cdots (\lambda + \sigma_{2m+1})}{(\lambda + \sigma_2) \cdots (\lambda + \sigma_{2m})} \\ &\quad (0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \cdots < \sigma_{2m} < \sigma_{2m+1}). \end{aligned} \quad (12.3)$$

零点和极点交替地排列在负实轴上，最右端的一个是零点。

同样，对于 RC 网络，把电抗函数中的 λ^2 换成 λ ，再除以 λ ，就成为阻抗，可表成(12.3)的倒数形式。它们和电抗函数一样，也能进行部分分式展开和连分式展开。

§ 13 二端网络的综合

已经讲过，集中参数二端阻抗 $Z(\lambda)$ 是一个正实(有理)函数。本节的目的就是反过来，在给定任意的正实函数时，证明存在一个二端网络，以它作为阻抗。这种二端网络的综合方法最初是由

O. Brune 发现的, 他的网络是一种所谓梯子形构造, 具有电抗元件数目最少的特点。其次的方法是电阻终接的电抗四端网络的综合, 为了说明的方便, 我们将在四端网络的工作特性理论中叙述。还有一种重要的方法就是不含互感的综合法。下面将依次地加以说明。

1) Brune 方法 假定给定的正实函数为 $Z(\lambda)$ 。

第 1 步 $Z(\lambda)$ 在虚轴上有极点时, 把它们分离出来^①, 成为

$$Z(\lambda) = Z_1(\lambda) + \sum \frac{a_v \lambda}{\lambda^2 + \omega_v^2} + a_\infty \lambda. \quad (13.1)$$

由于右边的第二项和第三项是一些可实现电抗, 所以 $Z(\lambda)$ 可表成图 13.1 的形式。剩下的 $Z_1(\lambda)$ 仍满足正实函数的条件, 它的次数比由 $Z(\lambda)$ 分出的电抗的次数低。

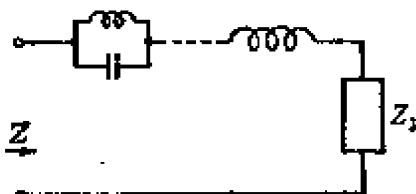


图 13.1

第 2 步 $Z_1(\lambda)$ 在虚轴上有零点时, 再把它分离出来:

$$\frac{1}{Z_1(\lambda)} = \frac{1}{Z_2(\lambda)} + \sum \frac{b_v \lambda}{\lambda^2 + \omega_v^2} + b_\infty \lambda, \quad (13.2)$$

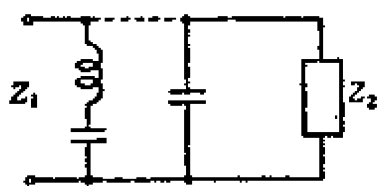


图 13.2

相当的网络如图 13.2。这一步又降低了分出的电抗的次数。

第 3 步 反复进行上面两步, 经过有限多回, 可得出一个在虚轴上没有极点也没有零点的正实函数。令它为 $Z_s(\lambda)$ 。设在虚轴上它的实部的最小值为 R_0 , 再作如下的分离:

$$Z_s(\lambda) = Z_4(\lambda) + R_0, \quad (13.3)$$

$Z_4(\lambda)$ 仍是正实函数, 它的次数和 $Z_s(\lambda)$ 的次数相同。这一步以后, 如果可能进行第 1 和 2 步, 则还应该反复进行。

^① 原点的极点是 $\omega_0=0$, 包含在 Σ 中。

第4步 上述步骤不可能时, 设它为 $Z_5(\lambda)$, 它在虚轴上一点处取到不为零的纯虚数值。这一点设为 $j\omega_0$, 即可写出

$$Z_5(j\omega_0) = j\omega_0 L_1, \quad (13.4)$$

其中 L_1 是一个实常数。现在假定 L_1 是负的。由 $Z_5(\lambda)$ 可以分出一个负电感 L_1 , 剩下的是

$$Z_6(\lambda) = Z_5(\lambda) - \lambda L_1 = Z_5(\lambda) + \lambda(-L_1), \quad (13.5)$$

由于 $(-L_1)$ 是正数, 所以 $Z_6(\lambda)$ 是正实函数。但从(13.4)知道, $Z_6(j\omega_0)$ 等于零, 根据第2步, 就能分离出一个谐振电路与之并联。即写成

$$\frac{1}{Z_6(\lambda)} = \frac{1}{Z_7(\lambda)} + \frac{\lambda}{L_2(\lambda^2 + \omega_0^2)}. \quad (13.6)$$

这个 L_2 表示谐振电路的电感。 $\lambda \rightarrow \infty$ 时左边和右边第二项都趋于零, 所以第一项也必须趋于零。就是说, $Z_7(\lambda)$ 在无穷远点具有极点。若把它分离出来,

$$Z_7(\lambda) = Z_8(\lambda) + \lambda L_3, \quad (13.7)$$

$Z_8(\lambda)$ 当然仍是正实函数。把以上结果用图表示, 即得图 13.3。其中电感 L_1 是负的, 由(13.6), 考虑在 $\lambda = \infty$ 的附近, 可得结果

$$-\frac{1}{L_1} = \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}, \quad (13.8)$$

但它可以改写成

$$(L_1 + L_2)(L_2 + L_3) = L_2^2, \quad (13.9)$$

于是可以用图 13.4 的正元件的全耦合线圈表示出来。又在以上的步骤中, $Z_6(\lambda)$ 比 $Z_5(\lambda)$ 高一次, $Z_7(\lambda)$ 比 $Z_6(\lambda)$ 低二次, 得出 $Z_8(\lambda)$ 时又降低一次, 所以结果是得到一个降低二次的函数。

其次考虑 L_1 为正的情况。此时用导纳代替阻抗后同样可得

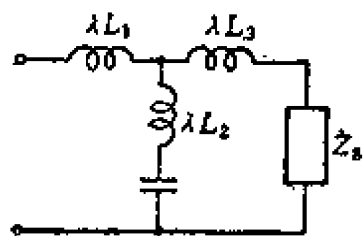


图 13.3

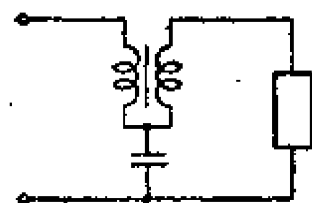


图 13.4

图 13.5 的电路。虚线内部是一个 π 型电路, 若用 § 19 的方法, 把它变换成 T 型电路, 则可得到图 13.6, 它和图 13.4 同样能用正元件的全耦合线圈表示出来。

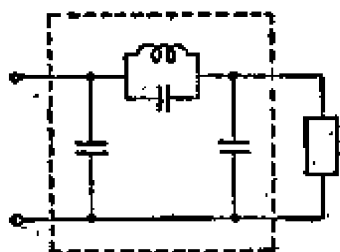


图 13.5

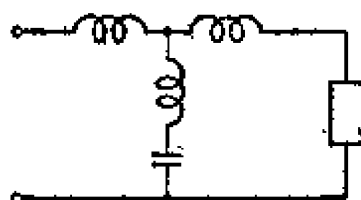


图 13.6

以上是把 L_1 为正和负的情况分别考虑, 由图 13.6 可知, 正的情况也能在阻抗形式下进行分离。此时由于 $Z_6(\lambda)$ 和 $Z_7(\lambda)$ 不是正实函数, 要证明 L_2 是正的以及 $Z_8(\lambda)$ 是正实函数, 比较麻烦一些。

以上四步总有一步是可能的, 顺次进行, 经过有限多回, 结果综合完成时, 例如可得出图 13.7 所示的网络。

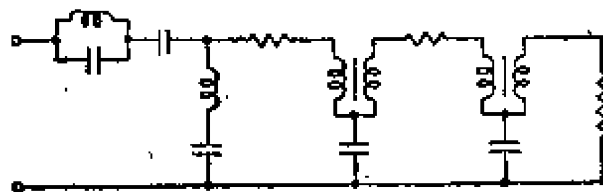


图 13.7

上面的第 3 和第 4 步, 在虚轴上的极点和零点没有全部除去的情况下也能进行, 所以改变这种次序, 结果能得出各种不同的构造。

以上的第 3 步是在虚轴上作出阻抗偶部的零点的步骤, 进行这种方法也就是由偶部的复数零点直接综合的方法。首先, 实轴上有零点时和第 4 步一样, 可以分出图 13.3 的一节。这一次 L_2 将变成负。有复数零点时, 可以分出一个图 13.3 那样的, 但其中的电感用串联谐振电路代替的, 电容用并联谐振电路代替的一节。这个方法在综合途中不需要分出电阻, 所以所得的网络正好是一个电抗四端网络终接一个电阻的形式。这个方法事实上不外就是 § 20 所述的电抗四端网络的锁联综合法。

2) 不使用互感的综合理论 在 Brune 方法中, 第 4 步必需

全耦合线圈。可是全耦合线圈或一般的互感，和单个的电感和电容比较起来，正确的物理实现较为困难，所以很希望有一种不使用互感的网络。如把第4步作如下改变，则这是可能的^①。即在

$$Z_5(j\omega_0) = j\omega_0 L_1 \quad (13.10)$$

中，设 L_1 为正，由定理8，可求出一个正的实数 λ_0 ，满足下列方程：

$$Z_5(\lambda_0) = \lambda_0 L_1. \quad (13.11)$$

再由这个 λ_0 ，作出

$$Z_6(\lambda) = Z_5(\lambda_0) \frac{\lambda Z_5(\lambda) - \lambda_0 Z_5(\lambda_0)}{\lambda Z_5(\lambda_0) - \lambda_0 Z_5(\lambda)}, \quad (13.12)$$

并根据 Richards 定理，它是次数不高于 $Z_5(\lambda)$ 的正实函数。反之，由上式解出 $Z_5(\lambda)$ ，则

$$\begin{aligned} Z_5(\lambda) &= Z_5(\lambda_0) \frac{\lambda Z_6(\lambda) + \lambda_0 Z_5(\lambda_0)}{\lambda Z_5(\lambda_0) + \lambda_0 Z_6(\lambda)} \\ &= \left\{ \frac{1}{Z_6(\lambda)} + \frac{\lambda_0}{\lambda Z_5(\lambda_0)} \right\}^{-1} + \left\{ \frac{\lambda}{\lambda_0 Z_5(\lambda_0)} + \frac{Z_6(\lambda)}{Z_5(\lambda_0)^2} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \frac{1}{Z_6(\lambda)} + \frac{1}{\lambda L_1} \right\}^{-1} + \left\{ \lambda C_1 + \frac{1}{Z_7(\lambda)} \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (13.13)$$

其中

$$C_1 = 1/\lambda_0^2 L_1, \quad Z_7(\lambda) = \lambda_0^2 L_1^2 / Z_6(\lambda).$$

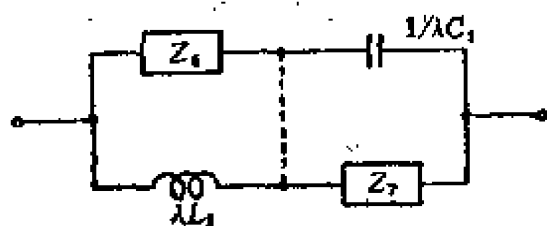


图 13.8

(13.13)式的意义就是把 $Z_5(\lambda)$ 表成图 13.8。但在(13.12)的分母中，代入 $\lambda = j\omega_0$ ，则由(13.10)和(13.11)，知道分母等于零。然而分子不等于零，所以 $Z_6(\lambda)$ 在

$\lambda = j\omega_0$ 处具有极点，若用第1步把它分出，则得一个次数降低二次的阻抗。 $Z_7(\lambda)$ 也具有零点，所以也能够降低二次。

① R. Bott, R. J. Duffin, Impedance synthesis without use of transformers, J. A. P., 20 (1949), 816.

在 L_1 为负的情况下,可以在导纳基础上进行同样的演化。以上是这个方法的重点。

推广这个方法,便得出处理偶部零点的方法,亦就是不使用 Brune 的第 3 步的方法^①。设

$$2G(\lambda) = Z(\lambda) + Z(-\lambda),$$

它的右半平面的零点设为 λ_0 , λ_0 是正的实数。根据定理 14,

$$Z_1(\lambda) = Z(\lambda_0) \frac{\lambda Z(\lambda) - \lambda_0 Z(\lambda_0)}{\lambda Z(\lambda_0) - \lambda_0 Z(\lambda)} \quad (13.14)$$

是比 $Z(\lambda)$ 低一次的阻抗,于是除去了 λ_0 处的零点。如果 $\lambda_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ ($\sigma_0 > 0$), 且

$$Z(\lambda_0) = C > 0,$$

同样可根据定理 15, 取 $Z_0(\lambda) = \frac{\lambda^2 + \sigma_0^2 + \omega_0^2}{2\sigma_0\lambda}$, 则

$$Z_1(\lambda) = C \frac{Z_0(\lambda)Z(\lambda) - C}{CZ_0(\lambda) - Z(\lambda)} \quad (13.15)$$

是比 $Z(\lambda)$ 低二次的阻抗,这就除去了 λ_0 处的零点。在

$$Z(\lambda_0) = r_0 + jx_0 \quad (x_0 \neq 0)$$

的情况下,首先作出

$$Z_1(\lambda, k) = Z(k) \frac{\lambda Z(\lambda) - kZ(k)}{\lambda Z(k) - kZ(\lambda)}, \quad (13.16)$$

则

$$Z_1(\lambda_0, 0) = (r_0 + jx_0) / Z(0),$$

$$Z_1(\lambda_0, \infty) = Z(\infty) / (r_0 + jx_0).$$

由于两者的虚部符号相反,所以存在一个实的正数 k_0 , 使得

$$Z_1(\lambda_0, k_0) = C > 0.$$

选择这个 k_0 , 则 $Z_1(\lambda, k_0)$ 可以进行 (13.15) 的演化, 于是又可把 λ_0 处的零点除去。

① 喜安善市, 不使用互感的二端网络综合法, 电气通信学会杂志, 33 (1950), 343~352. A. Fialkow, I. Gerst, Impedance synthesis without minimization, J. M. P., 34 (1955), 160~168.

最后,再讲述一个有趣的方法^①。已经讲过,虚轴上没有极点的正实函数是由它的偶部唯一地决定的。这里把偶部作如下的分解:

$$G(\lambda) = \sum G_v(\lambda), \quad (13.17)$$

如果各个 $G_v(\lambda)$ 都满足正实函数偶部的条件,且对于各个 $G_v(\lambda)$ (虚轴上没有极点)各定出正实函数 $Z_v(\lambda)$,则由于唯一性,就有

$$Z(\lambda) = \sum Z_v(\lambda). \quad (13.18)$$

补量网络是这个原理的一个应用,还有,Brune 的第3步,取

$$G(\lambda) = G_1(\lambda) + R_0,$$

$G_1(\lambda)$ 的零点也可考虑在虚轴上的这种分解。这里把它一般化,在进行(13.17)的分解时,要使各个 $G_v(\lambda)$ 在虚轴上都具有零点。为了简单起见,分母的常数项假定为正,由于分子是在虚轴上不能为负的偶多项式,所以能把它分解成虚轴上不为负的偶多项式之和。这种方法有许多种,例如对应于一组复数零点^②,若分成因式

$$(\lambda^2 - 2\sigma_1\lambda + \omega_1^2)(\lambda^2 + 2\sigma_1\lambda + \omega_1^2) = (\lambda^2 + \omega_1^2)^2 - 4\sigma_1^2\lambda^2, \quad (13.19)$$

则由于右边两项在虚轴不为负, $G(\lambda)$ 可按此进行分解,它的第一项在 $j\omega_1$ 有零点,第二项在原点和无穷远点有零点。把它一般化,设 $g(\lambda)$ 为具有左半平面零点的因式,若把它分成偶部和奇部之和,且

$$g(\lambda)g(-\lambda) = v(\lambda)^2 - u(\lambda)^2, \quad (13.20)$$

则按照 Hurwitz 多项式的性质, $v(\lambda)$ 和 $u(\lambda)$ 的零点全部在虚轴上。

更有趣的分解法,是把分子多项式各项完全拆散,如此分解后,各个 $G_v(\lambda)$ 只在原点和无穷远点有零点,再用 Brune 方法来

① 宫田房近,二端网络合成的新系统,电气通信学会杂志,35(1952),211~218.

② 复数零点四个成对地出现。实轴上的零点是正负对出现,虚轴上的零点是二阶的。

实现,可得出图 13.9 所示的没有理想变压器的简单电路。这种分解不是经常可能的,作为分子多项式的 $-\lambda^2$ 多项式,写成

$$\sum a_\nu (-\lambda^2)^\nu \quad (13.21)$$

时,各个 a_ν 都必须为正或零。但是 a_ν 也有负的,此时解决的方法是零点不限在虚轴上,或者在 $G(\lambda)$ 的分母和分子上同乘以虚轴上为正值的适当的偶多项式,使系数都成为正数。

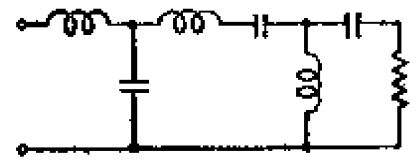


图 13.9

第3章 四端网络

§ 14 四端网络

对于四端网络,由于可考虑它的分离开的输入和输出端子,且已知传达函数具有第1章所述的一般性质,所以它已具备传输网络的面貌。事实上,实际的传输网络几乎全是四端网络的简单组合。当然,四端网络是多端网络的一种,从多端网络的理论来作一般的讨论,可以更清楚。可是,多端网络理论本身就以四端网络理论作为模型,并且把传输四端网络的设计理论和多端网络的一般讨论分开,比较方便,所以在本篇内,主要叙述四端网络的设计理论和传输四端网络方面很重要的电抗四端网络。与一般四端网络有关的实现条件和综合上其他的基本问题,都将放在第二篇内讲述。这里首先在本章内,凡是与第二篇有点重复的地方,都是作为设计理论的准备而叙述一些必要事项的大意。

进入讨论以前,需要对几种实用的四端网络作一番简单说明。

滤波器——即是能从各种频率的信号混合成的合成信号中分离出特定频率范围的信号的网路。衰减小、能让通过的频带叫作通带,衰减大、几乎不让信号通过的频带叫作阻带,这个边界上的频率叫做截止频率。按照通带在哪个频率范围,滤波器可分成下列几类。

(i) **低通滤波器** 这是以比截止频率低的一侧为通带,高的一侧为阻带的滤波器。

(ii) **高通滤波器** 反之,这是以高的一侧为通带的滤波器。

(iii) **带通滤波器** 这是在两个有限频率之间为通带,外侧为阻带的滤波器。

(iv) **带阻滤波器** 这是与(iii)相反的滤波器。

此外,也有具两个以上通带的滤波器。

延迟网络——是使信号有一定时间延迟的网络。

衰减校正网络——传输线在不同的频率上显示出不同的衰减特性。因此，在长距离上传输信号时，为了保持信号的明了度，有必要把这个衰减特性校正成同样的衰减。具有这种性质的就是衰减校正网络。

相位校正网络——性质同上，但为校正相位特性的网络。

其他，虽然还有变压器、衰减器等传输线路，但在本书中，主要讨论滤波器的問題。

§ 15 四端网络的表达方法

今在图 15.1 内，取两对端子 11' 和 22'，定出各个电压电流 V_1, I_1, V_2, I_2 之方向如箭头所示。

四端网络的性质因而由这四个变数之间的关系所规定。为了求出这个关系，我们作出在第 1 和第 2 回路内含有这两对端子的回路方程

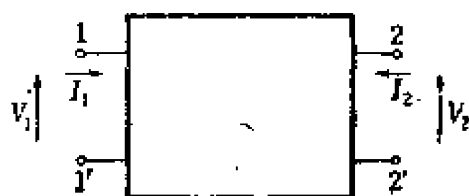


图 15.1

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n z_{ij} I_j &= V_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \\ V_i &= 0 \quad (i \geq 3). \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

由此，消去 $I_j (j \geq 3)$ ，可得

$$\left. \begin{aligned} a_1 I_1 + b_1 I_2 + c_1 V_1 + d_1 V_2 &= 0, \\ a_2 I_1 + b_2 I_2 + c_2 V_1 + d_2 V_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

形式的两个独立的一次式。有时 I_1 和 I_2 不是独立的，在这种情况下，回路方程仍须是 (15.1) 的形式，但不能变成 (15.2) 那样的独立的两个一次式。我们虽然求出了 (15.2) 的形式来规定四端网络，但它们毕竟在处理上是不方便的，所以通常有解出其中两个变量的形式。例如，解出 I_1 和 I_2 ，可得

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2, \\ I_2 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2. \end{aligned}$$

我们还可方便地把它表成矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (15.3)$$

这个 (Y_{ij}) 叫作“导纳矩阵”。同样，按照所选两个变量的不同，还有下列的表达式：

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{阻抗矩阵}) \quad (15.4)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_1 \end{pmatrix}, \quad (15.5)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{链联矩阵}) \quad (15.6)$$

在最后两式内，采用 $-I_2$ 是为了使用上的方便。此外，也有解出 V_2 和 I_1 或 V_2 和 I_2 的式子，但若将两对端子交换，就变成上式，由于在物理上性质相同，所以没有特殊考虑的必要时。另外，所有这些表达方法不是经常可能的，但由于总可以表成 (15.2) 的形式，所以在这些表达方法中总有某种是可能的。

若将这类式子右边的变量看为输入，那末左边的变量就变成相应的输出，矩阵的各个元素都是传达函数，但只有最后的链联矩阵是例外，11' 端子侧不加信号时，由于不能独立定出 V_2 和 I_2 ，所以不能把它看成为输入，因此 A, B, C 和 D 就不一定是传达函数。可是，这个矩阵在传输四端网络理论中考虑起来非常方便，通常以 K 表示。

这里，最好写出阻抗矩阵、导纳矩阵以及链联矩阵之间的变换式

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|Z|} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} D & -|K| \\ -1 & A \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|Y|} \begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & |K| \\ 1 & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = -\frac{1}{Y_{21}} \begin{pmatrix} Y_{22} & 1 \\ |Y| & Y_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{21}} \begin{pmatrix} Z_{11} & |Z| \\ 1 & Z_{22} \end{pmatrix}.$$

其中 $|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$, $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$, $|K| = AD - BC$. 顺便, 也最好求出输入阻抗(导纳)的表达式. 在四端网络 22' 端子上联接一个阻抗 Z_2 时, 从 11' 端看入的阻抗(导纳)为

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + B(-I_2)}{CV_2 + D(-I_2)} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D} \\ &= Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22} + Z_2} = Z_{11} \frac{Z_{22} + Z_2}{Z_{22} + Z_2}, \\ Y_1 &= Z_1^{-1} = Y_{11} - \frac{Y_{12}^2}{Y_{22} + Y_2} = Y_{11} \frac{Y_{22} + Y_2}{Y_{22} + Y_2} \\ &\quad (Z_{22} = Y_{22}^{-1}, Y_{22} = Z_{22}^{-1}, Y_2 = Z_2^{-1}). \end{aligned}$$

可是, 如 § 7 所述, 对于由 R, L, C 及 M 构成的集中参数网络, 由于在 (15.1) 的系数之间有 $Z_{ij} = Z_{ji}$ 的关系, 所以在 (15.3) 内, 变成

$$Y_{12} = Y_{21}. \quad (15.7)$$

这表明互易定理是成立的, 这样的网络叫做互易网络. 在其他矩阵中, 这种关系表现为

$$Z_{12} = Z_{21}, \quad \alpha = \delta, \quad |K| = 1. \quad (15.8)$$

下面, 如没有特殊声明, 所考虑的都限于互易的网络.

以上讲了四端网络的四种表达形式. 除此之外, 还有各种表达方法. 其中之一是对到达这些端子上的电压和电流, 考虑其波的传播形式, 对于传输网络, 这是一种重要的表达方法. 现在考虑图 15.2 那样的, 在四端网络的两对端子上联接适当传输线的情形. 如以后 § 19 所述, 传输线上的

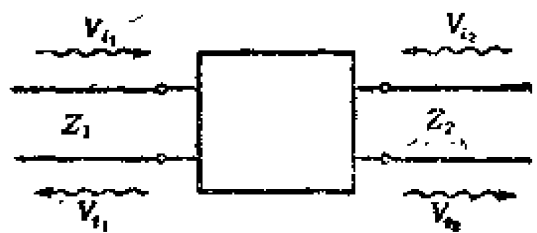


图 15.2

的电压和电流都是入射波和反射波, 就各个波而言, 电压与电流之比等于由线路决定的常数波动阻抗 Z_0 . 所以不必规定电压和电流两者, 为了方便, 进行标称以后, 只需写出

$$v = V / \sqrt{Z_0} = \sqrt{Z_0} I.$$

于是在图中的四端网络内, 如果令 $v_{i1}, v_{i2}; v_{t1}, v_{t2}$ 各为入射波和反射波, 则一个四端网络就规定了这四个波之间的关系。这算是第四种表达形式, 即“ S 矩阵”的形式^①

$$\begin{pmatrix} v_{t1} \\ v_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix}, \quad (15.9)$$

对于互易网络, 也有 $S_{12} = S_{21}$ 。从四端网络两侧观看线路, 可以等价地画成图 15.3 那样。就是说, S 矩阵规定了有限外部阻抗情况下的性质。在这种意义下, 它是一个**工作特性矩阵**。

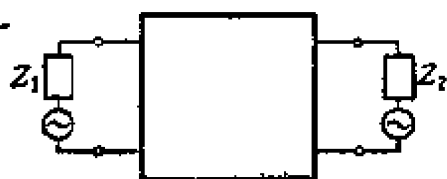


图 15.3

此外, 还有电流传输系数、电压传输系数的表达, 和影象参数的表达, 这些将在另一节内讨论。

按照上述的各种表达形式, 必须取四个参数才能完全规定一个四端网络, 在互易的情况下, 必须取三个参数。

§16 传输系数

信号的传输网络是四端网络时, 它的输入端和输出端各接电源和负载, 它们的阻抗的值一般是有限的。于是, 这种使用状态下的传输特性可以用一些参数表示出来。

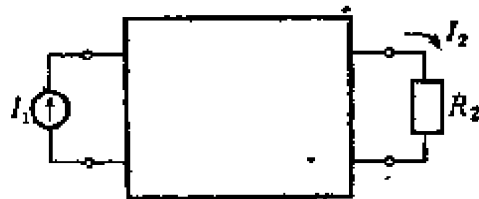


图 16.1

1) **电流传输系数** 在图 16.1 内, 如果输入端有一个内阻为无穷大的电流源, 输出端联接一个有限值的电阻 R_2 , 此时, 输入与输出电流之比由下式定义:

$$M \equiv \frac{I_1}{I_2} = CR_2 + D = \frac{R_2 + Z_{22}}{Z_{12}}. \quad (16.1)$$

① 在第二篇内将详细叙述 S 矩阵。

这和 § 4 所述的傳达函数相反, 分子是輸入, 分母是輸出, 以后知道, 这种式子在理論上是方便的。这种函数是傳达函数的倒数, 习惯上称之为**傳輸系数**。

2) **电压傳輸系数** 图 16.2 內, 在电源內阻为零, 輸出端电阻为有限值的情况下, 可表成

$$N \equiv \frac{V_1}{V_2} = BG_2 + A = \frac{G_2 + Y_{22}}{-Y_{12}}. \quad (16.2)$$

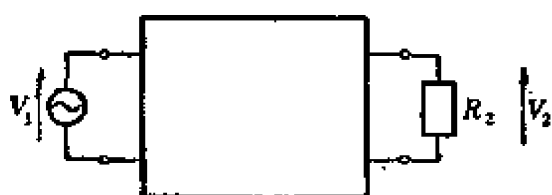


图 16.2

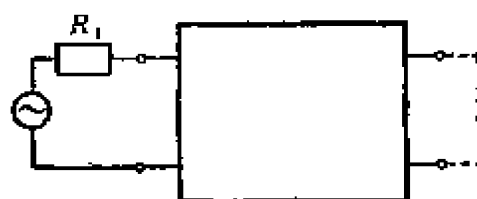


图 16.3

3) **短路傳輸系数和开路傳輸系数** 在图 16.3 內, 电源側为有限的电阻、負載电阻为 ∞ 或 0 时, 各可表成

$$\left. \begin{aligned} M_s &= \frac{I_0}{I_2} = BG_1 + D = \frac{G_1 + Y_{11}}{-Y_{12}}, \\ N_0 &= \frac{V_0}{V_2} = CR_1 + A = \frac{R_1 + Z_{11}}{Z_{12}}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

由此知道, 将四端网络反向联接时 M 和 N 仍不变。以上四个傳輸系数也是四端网络的一种表达形式。

4) **工作傳輸系数** 这是图 16.4 內两个終端电阻都为有限时表示傳輸特性的系数, 基准电压取为图示的电源电压, 在图 16.5 那样的电源和負載之間, 联接一个使这两个电阻相匹配的理想变

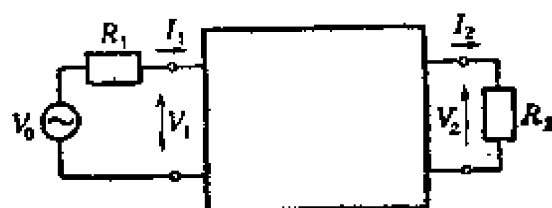


图 16.4



图 16.5

压器时, 输出电压就是无源四端网络负载上最大的输出电压^①。因此, 我们表成下列形式:

$$S_b \equiv \frac{V'_2}{V_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \frac{V_0}{V_2}. \quad (16.4)$$

实际上, 这就是 S 矩阵的 S_{21} 的倒数。

5) 反射传输系数 输入端阻抗已经匹配时, 输入阻抗 Z_i 等于 R_1 , 输入电压成为 $V_0/2$ 。但一般情况下的输入电压不是这个 $V_0/2$, 由于不匹配时, 可以考虑有一部分的 $V_0/2$ 反射回来。这就可写

$$V_1 = \frac{V_0}{2} + \frac{1}{T} \frac{V_0}{2}. \quad (16.5)$$

这个 T 称为反射传输系数。它就是 S 矩阵的 S_{11} 的倒数。

这里, 还可把 S_b 和 T 的表达式求下去。

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} A + \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} B + \sqrt{R_1 R_2} C + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} D \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} M + \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} N \right). \end{aligned} \quad (16.6)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{Z_i + R_1}{Z_i - R_1} = \frac{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} A + \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} B + \sqrt{R_1 R_2} C + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} D}{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} A + \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} B - \sqrt{R_1 R_2} C - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} D} \\ &= \frac{NR_2 + MR_1}{NR_2 - MR_1}. \end{aligned} \quad (16.7)$$

§ 17 影象参数

两个终端阻抗如果各等于四端网络的两个输入阻抗, 那末由于在联接点没有反射, S 矩阵变成对角线元素为零的简单形式。影象参数就是这种状态下的表达形式。

在图 17.1 内, 如果四端网络的 $22'$ 端子上接有阻抗 Z_{02} 时,

^① 此时由电源有最大的功率供至负载。

11' 端的输入阻抗为 Z_{01} , 反之, 如果 11' 端子上接有阻抗 Z_{01} 时, 22' 端的输入阻抗为 Z_{02} , 那末这样两个阻抗 Z_{01} 和 Z_{02} 统称为**影象阻抗**。



图 17.1

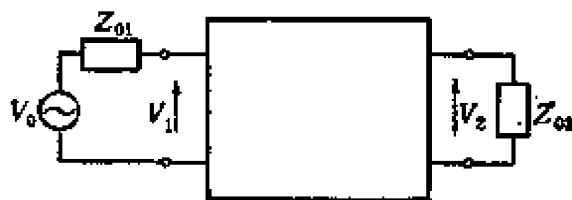


图 17.2

当两个终端阻抗是影象阻抗时, 也可求出如图 17.2 状态的与工作传输系数相当的系数

$$S_I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \frac{V_0}{V_2} = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \frac{V_1}{V_2}. \quad (17.1)$$

它叫作影象传输系数, 由公式

$$\gamma \equiv \alpha + j\beta \equiv \ln S_I \quad (17.2)$$

定义的 γ 叫作影象传输量。它的实部 α 叫影象衰减, 虚部 β 叫影象相位^①。

其次考虑将这种参数用四端网络参数来表达。首先, Z_{01} 和 Z_{02} 必须满足

$$Z_{01} = \frac{AZ_{02} + B}{CZ_{02} + D}, \quad Z_{02} = \frac{DZ_{01} + B}{CZ_{01} + A}.$$

由此得到

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}}, \quad Z_{02} = \sqrt{\frac{DB}{CA}} = \sqrt{\frac{Z_{22}}{Y_{22}}}. \quad (17.3)$$

由于 $1/Y_{11}$ 是终端短路时的输入阻抗, 令它为 Z_{1s} , 则通常写成

$$Z_{01} = \sqrt{Z_{11}Z_{1s}}, \quad Z_{02} = \sqrt{Z_{22}Z_{2s}}.$$

就是说, 影象阻抗是终端开路 and 终端短路时的两个输入阻抗的几何平均。对于传输量, 把 (16.6) 式的 R_1 和 R_2 分别代以 Z_{01} 和 Z_{02} , 即得

$$e\gamma = S_I = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}.$$

这里利用 $AD - BC = 1$ 的关系, 可得

① 也有人把 α 和 β 倒过来使用。

$$e^{-\gamma} = \sqrt{AD} - \sqrt{BC},$$

由此得到

$$\cosh \gamma = \sqrt{AD}, \quad \sinh \gamma = \sqrt{BC}$$

以及

$$\coth \gamma = \sqrt{\frac{AD}{BC}} = \sqrt{Z_{11}Y_{11}} = \sqrt{Z_{22}Y_{22}}. \quad (17.4)$$

反之,又可得下列諸式:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \cosh \gamma, & B &= \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \sinh \gamma, \\ C &= \frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \sinh \gamma, & D &= \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \cosh \gamma \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= Z_{01} \coth \gamma, & Z_{22} &= Z_{02} \coth \gamma, \\ Z_{12} &= \sqrt{Z_{01}Z_{02}(\coth^2 \gamma - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (17.6)$$

§ 18 四端网络的結合

两个四端网络如图 18.1 那样串联时,总的阻抗矩阵即是这两个四端网络的阻抗矩阵之和。可是,这时每个四端网络各对端子必须满足传输四端网络的条件,即电流的大小相等,方向相反。如果在一个四端网络的一对端子上联接一个理想变压器,则这个条件恒能满足。

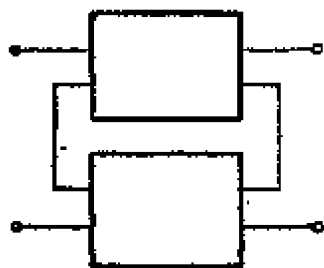


图 18.1

同样,如果象图 18.2 那样并联,则各个导纳矩阵之和即是总的导纳矩阵。此时也必须要有以上的条件。

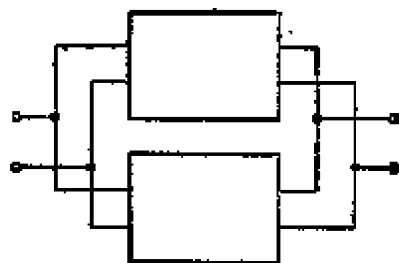


图 18.2

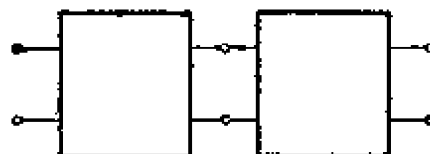


图 18.3

图 18.3 的鎖联,对于传输四端网络是很重要的。这时各个鎖

联矩阵之积即为总的链联矩阵。这也是链联矩阵名称的来由。

§ 19 简单的四端网络及其变换

为了帮助理解,我们考虑一些简单的四端网络的实例。

1) 梯子形网络 图 19.1 的两个网络是最基本的。它们的链联矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}. \quad (19.1)$$

I, 形网络(图 19.2), T 形网络(图 19.3), π 形网络(图 19.4)以及一般的梯子形网络(图 19.5)都可看成这些基本网络的链联, 它们的链联矩阵可表成(19.1)形式的矩阵的乘积。

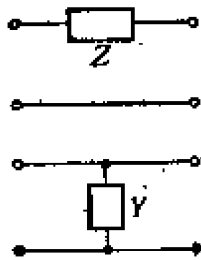


图 19.1

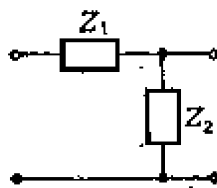


图 19.2

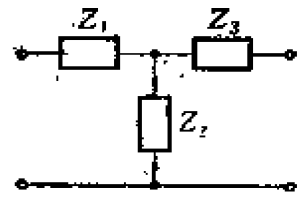


图 19.3

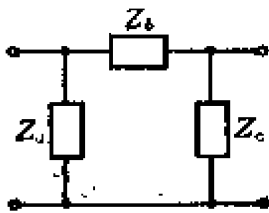


图 19.4

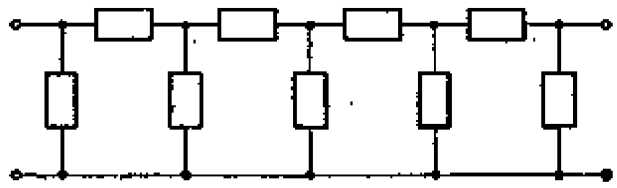


图 19.5

T 形和 π 形的相互变换式如下:

$$Z_a = \frac{\Delta}{Z_3}, \quad Z_b = \frac{\Delta}{Z_2}, \quad Z_c = \frac{\Delta}{Z_1}$$

$$(\Delta = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1),$$

$$Z_1 = \frac{Z_c}{Z_b + Z_b + Z_c}, \quad Z_2 = \frac{Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}, \quad Z_3 = \frac{Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c}.$$

2) 对称四端网络 这是左右两对端子经过交换后, 传输性质

不变的网路,它有下列关系:

$$Z_{11}=Z_{22}, \quad Y_{11}=Y_{22}, \quad A=D, \quad Z_{01}=Z_{02}, \quad (19.2)$$

有趣的是此时可令

$$Z_a = Z_{11} + Z_{12}, \quad Z_b = Z_{11} - Z_{12}, \quad (19.3)$$

而 Z_a 和 Z_b 都是可实现的阻抗。在图 19.6(a) 和 (b) 内,把输入和输出端串联后测出的阻抗就是 $2Z_a$ 和 $2Z_b$ (图内的理想变压器与 § 18 所述的有相同的意义)。由上式,反之可得

$$Z_{11} = (Z_a + Z_b)/2, \quad Z_{12} = (Z_a - Z_b)/2. \quad (19.4)$$

这说明一个对称的四端网络可以用两个二端阻抗表达出来。

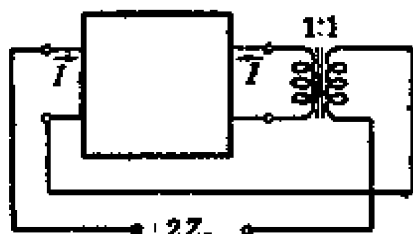


图 19.6(a)

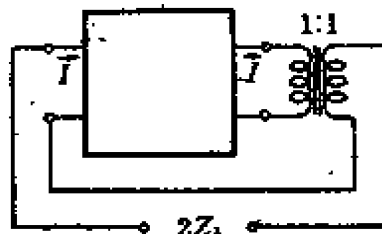


图 19.6(b)

如果对称四端网络在构造上也是对称的,那末可把它分成图 19.7 那样用线联接的两部分,在图 19.6(a) 内 $I_1 = I_2$ 状态时,联接线内的电流为零,而在 (b) 图内 $I_1 = -I_2$ 状态时,其余联接线内的电流为零。此时在图 19.8 内,取它的一半,如 $I_1 = I_2$, 零电流的联接线成为开路,其余的为短路,这种状态测出的阻抗即为 Z_a , 开路和短路对调后测出的阻抗即为 Z_b 。这就称为**二等分定理**。

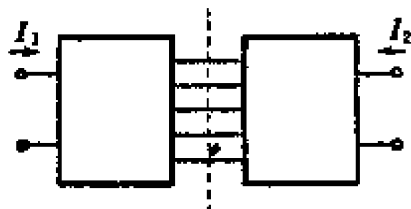


图 19.7

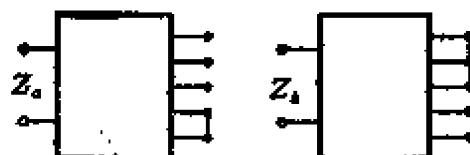


图 19.8

在图 19.9 的对称格子形网络内,应用二等分定理,图中各支的阻抗就是 Z_a 和 Z_b 。因此,对称四端网络总可以表成对称格子

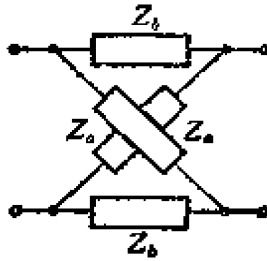


图 19.9

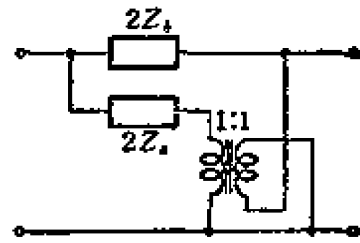


图 19.10

形网络①。

图 19.10 为对称格子形网络的一个等效网络,此外,还有许多其他的等效网络。

3) 反对称四端网络 如果一个四端网络(或一般多端网络)的阻抗矩阵是另一个四端网络(多端网络)阻抗矩阵 (Z_{ij}) 的逆矩阵形式,即 $R_0^2(Z_{ij})^{-1}$,则称这个四端网络为另一个四端网络的倒量网络。所谓反对称网络,即是左右两对端子交换后,所成的网络为原来四端网络的倒量网络。在这种情况下,下列关系是成立的:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= R_0^2 Y_{22}, Z_{22} = R_0^2 Y_{11}, Z_{12} = -R_0^2 Y_{12}, \\ B &= R_0^2 C, Z_{01} Z_{02} = R_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (19.5)$$

特别是对于具有对称和反对称两性质的四端网络,

$$Z_a Z_b = R_0^2, Z_{01} = Z_{02} = R_0, S_b = S_f = \frac{Z_a + R_0}{Z_a - R_0}. \quad (19.6)$$

4) 传输线 在图 19.11 内,长为 l 的一段线路的送电端联有一个电源,接收端接有某个阻抗,设与接收端相距 x 处的电流和电压为 i 和 v ,在 $x+dx$ 点处的电流和电压为 $i+di$ 和 $v+dv$,线路

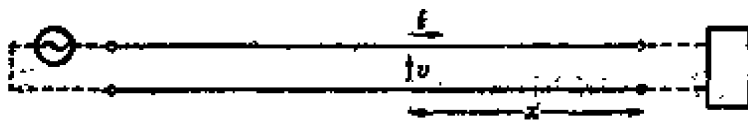


图 19.11

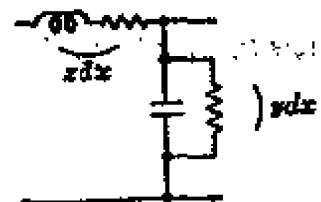


图 19.12

① 反之不成立。——译者注

是典型的分布参数网络,但在微小区间 dx 上,可认为它含有图 19.12 那样的微小元件。因此,串联元件 zdx 上的电压降和并联元件 ydx 内的分路电流各为

$$\left. \begin{aligned} dv &= zidx, \\ di &= yvdx. \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

把它写成

$$\frac{dv}{dx} = zi, \quad \frac{di}{dx} = yv,$$

解之可得

$$\left. \begin{aligned} v &= v_a e^{\gamma x} + v_b e^{-\gamma x}, \\ i &= i_a e^{\gamma x} + i_b e^{-\gamma x}, \end{aligned} \right\} \quad (19.8)$$

$$v_a = Z_0 i_a, \quad v_b = -Z_0 i_b,$$

其中

$$\gamma = \sqrt{yz}, \quad Z_0 = \sqrt{z/y}. \quad (19.9)$$

这两式的第一项是由送电端至接收端传播的行波,第二项是反方向的行波。加入接收端的条件 $v = Z_s i$, 即得

$$v_b = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} v_a. \quad (19.10)$$

它的右边的系数是反射波与入射波之比,即反射系数,当 $Z_s = Z_0$ 时,它变成零,反射波消失,而

$$v = v_a e^{\gamma x}, \quad i = i_a e^{\gamma x}, \quad (19.11)$$

在送电端,输入阻抗为

$$Z_1 = \left(\frac{v}{i} \right)_{x=1} = Z_0. \quad (19.12)$$

因此, Z_0 在线路上具有重要的意义,它叫作波动阻抗。历史上,传输线理论是影象参数理论的基础。

§ 20 电抗四端网络

一般的四端网络理论将在第二篇内叙述,由于电抗四端网络在下一章以后所述的传输四端网络的设计上是必不可少的,所以

这里简单地讲述它的实现条件和构成方法。

在图 20.1 内, 输入输出端子上都接以理想变压器, 这样可以作出一个二端网络, 它的阻抗为

$$Z = Z_{11}a^2 + 2Z_{12}ab + Z_{22}b^2. \quad (20.1)$$

因此, 电抗四端网络的阻抗矩阵所必须满足的条件是: 对于任意实数 a 及 b , 二次形式 (20.1) 是电抗函数。以后会知道, 这也是实现的充分条件。这个条件可写成下列定理。

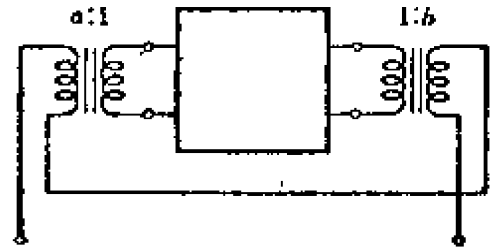


图 20.1

定理 20 为要 Z_{11} , Z_{12} , Z_{22} 是电抗四端网络可实现阻抗矩阵的元素, 必须而且只须它们具有下列形式:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{h_{11}^{(0)}}{\lambda} + \sum_1^n \frac{2h_{11}^{(\nu)}\lambda}{\lambda^2 + \omega_\nu^2} + h_{11}^{(\infty)}\lambda, \\ Z_{12} &= \frac{h_{12}^{(0)}}{\lambda} + \sum_1^n \frac{2h_{12}^{(\nu)}\lambda}{\lambda^2 + \omega_\nu^2} + h_{12}^{(\infty)}\lambda, \\ Z_{22} &= \frac{h_{22}^{(0)}}{\lambda} + \sum_1^n \frac{2h_{22}^{(\nu)}\lambda}{\lambda^2 + \omega_\nu^2} + h_{22}^{(\infty)}\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (20.2)$$

并且成立下列关系:

$$\begin{aligned} h_{11}^{(\nu)}, h_{22}^{(\nu)} &\geq 0, \\ h_{11}^{(\nu)}h_{22}^{(\nu)} - h_{12}^{(\nu)2} &\geq 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, \infty). \end{aligned} \quad (20.3)$$

上式内, 一个极点的有关部分很容易实现成图 20.2 的形式。

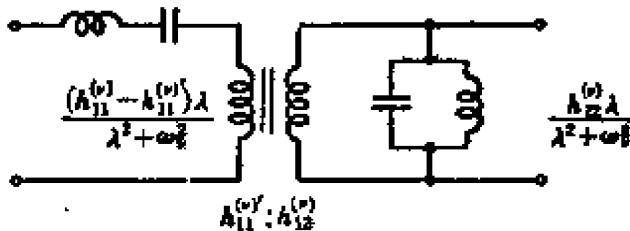


图 20.2

对于其他部分也一样, 结果总的网络是图 20.3 的形式。这就表明上述定理内的条件也是充分的。

这就是 Cauer 证明的部分分式网络, 对于导纳矩阵也能进行同样的操作, 还可以对这两矩阵交替地采用这种分离方法, 得出连分式形状的实现。

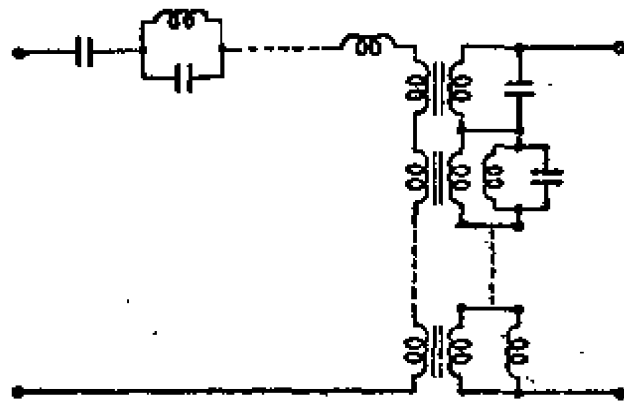


图 20.3

已经讲过, 必须有三个函数才能规定一个四端网络, 但对于电抗四端网络, 只要有二个函数已足够了。这两个函数能有各种取法, 其中之一是取 Z_{11} 和 $Z_{1K}(=Y_{11}^{-1})$ 。

从

$$\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} = Z_{11} - Z_{1K} \quad (20.4)$$

看出, Z_{22} 的零点和极点必须与 $Z_{11} - Z_{1K}$ 的奇数阶的零点和极点相一致。由此可求出 Z_{22} 的所有的零点和极点。究竟哪一个是这样点, 可从点前后的符号简单地决定出来。这样, 除一个一定的乘数以外, Z_{22} 是唯一确定的 (Z_{12}^2 在虚轴上是负实数)。在 Z_{22} 决定以后, Z_{12} 除符号外也被唯一地决定出来。于是, 定出分母和分子的最高次系数为 1 的 Z_{22} , 令它为 Z_{220} , 对应的 Z_{12} 为 Z_{120} , 实际的 Z_{22} 和 Z_{12} 可表成

$$Z_{22} = k^2 Z_{220}, \quad Z_{12} = k Z_{120}. \quad (20.5)$$

因此, 根据 Z_{11} , Z_{1K} 和实常数 k , 便能决定一个四端网络。以上需要三个函数, 但由于 Z_{11} 是电抗函数, 给的是 $Z_{11} + k$ 一个函数, 由此很容易把 Z_{11} 和 k 分开。

此外, 根据 § 16 所述的 M 和 N 或 S 和 T , 也能作出这种规定。

其次简单地讲一种重要的锁联型实现方法。它适用于滤波器

构造的实现。假设给定了 Z_{11} 和 Z_{1K} 。

(i) Z_{11} 和 Z_{1K} 有公共极点时, 取留数中的小者为 h_1 , 作下列的分离:

$$Z_{11}^{(1)} = Z_{11} - \frac{2h_1\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}, \quad Z_{1K}^{(1)} = Z_{1K} - \frac{2h_1\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}. \quad (20.6)$$

这就分出了一个串联的电抗二端网络。

(ii) 对于 $Z_{11}^{(1)-1}$ 和 $Z_{1K}^{(1)-1}$ 进行同样的操作, 就分出一个并联的二端网络。

(iii) 设不能进行上述分离的函数为 $Z_{11}^{(2)}$ 和 $Z_{1K}^{(2)}$, 求

$$Z_{11}^{(2)} = Z_{1K}^{(2)} \quad (20.7)$$

的根。若根为纯虚数 $j\omega_2$, 则利用 Brune 的第 4 步, 同样得出图 20.4 的网络。其中

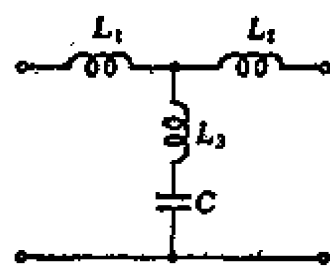


图 20.4

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= Z_{11}^{(2)}(j\omega_2)/j\omega_2, \\ L_2 &= \{Z_{11}^{(2)'}(j\omega_2) - L_1\}/2 > 0, \\ L_3^{-1} + L_1^{-1} + L_2^{-1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.8)$$

若 (20.7) 的根为实数 σ , 则可将上式内的 $j\omega_2$ 换成 σ , 但 $L_2 < 0$ 。

对于复数根 $\mu + j\nu$ ($\mu, \nu > 0$), 则由下列各式:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11}^{(2)}(\mu + j\nu) &\equiv \alpha + j\beta, \\ L_1 &= (\alpha\nu + \beta\mu)/2\mu\nu, \\ C_1^{-1} &= (\alpha\nu - \beta\mu)(\mu^2 + \nu^2)/2\mu\nu, \\ Z_{11}^{(2)'}(\mu + j\nu) - L_1 + C_1^{-1}(\mu + j\nu)^{-2} &\equiv (\gamma + j\delta)^{-1}/4, \\ L_3 &= 1/\gamma, \\ C_3 &= -\{(\mu^2 - \nu^2)\gamma + 2\mu\nu\delta\}/(\mu^2 + \nu^2)^2, \\ L_1^{-1} + L_2^{-1} + L_3^{-1} &= 0, \\ C_1 + C_2 + C_3 &= 0, \\ C_4^{-1} &= -L_3\{(\mu^2 + \nu^2)^2 L_3 C_3 + 2(\mu^2 - \nu^2) + (1/L_3 C_3)\}, \\ L_3 L_4 C_3 C_4 (\mu^2 + \nu^2)^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (20.9)$$

求出各个元件，结果得到图 20.5 形式的网络。它可以用图 20.6 那样的有全耦合线圈的网络实现出来。

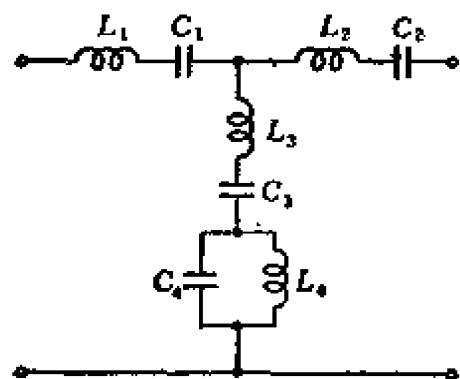


图 20.5

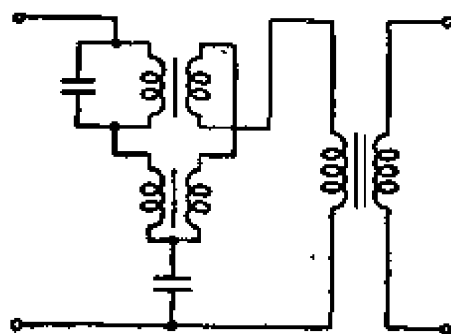


图 20.6

以上是锁联型网络的实现，最后，对应于(20.5)式内的 k ，在终端留有一个未决定的理想变压器。

第4章 影象参数理論

§21 电抗四端网络的影象参数

傳輸四端网络中特別重要的是具有高級特性的滤波器。影象参数理論是滤波器設計方法中最初完成的理論，与以后发展的工作特性理論相比較，由于它不能直接表示实际的特性，所以不是滿意的理論，但在要求不高的情况下，由于它的簡單，即使在現在，它仍是很有用的。

对于滤波器，希望通带內的衰减小。于是利用电抗网络来构成，这是常識。所以这里討論一下电抗四端网络的影象参数的性质。由于

$$\left. \begin{aligned} Z_{01} &= \sqrt{Z_{11}/Y_{11}}, \quad Z_{02} = \sqrt{Z_{22}/Y_{22}}, \\ \coth \gamma &= \sqrt{Z_{11}Y_{11}} = \sqrt{Z_{22}Y_{22}}, \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

Z_{01} , Z_{02} , $\coth \gamma$ 都是两个电抗函数的几何平均。这样的函数称为“Q函数”。Q函数在右半平面上正則。它的符号有正負两个，在正实軸上， Z_{11} , Z_{22} , Y_{11} 和 Y_{22} 是正实数，通常选定这个符号使Q函数为正实数比較方便。如果如此选择，則假定 Z_{01} 在右半平面上，就有

$$|\arg Z_{01}| \leq \frac{1}{2} |\arg Z_{11}| + \frac{1}{2} |\arg Y_{11}| \leq |\arg \lambda|.$$

就是說，Q函数也滿足正实函数的条件。但它一般是无理函数，所以和集中参数的阻抗不同。

在虚軸上，由于 Z_{11} 和 Y_{11} 都是純虚数，所以当它們异号时 Z_{01} 为純虚数，同号时为正实数。Q函数在虚軸上能取正实数和純虚数之值。 Z_{01} 和 $\coth \gamma$ 之积，按照(17.6)，是一个电抗函数，所

以一个为純虚数时另一个是实数。这样两个函数称为相互共轭的 Q 函数。

根据以上的性质,实频率轴可分成下列两种区域。

(i) Z_{01} 和 Z_{02} 为正实数, $\coth \gamma$ 为純虚数的区域。

(ii) Z_{01} 和 Z_{02} 为純虚数, $\coth \gamma$ 为正实数的区域。

对于后者,又分为 Z_{01} 和 Z_{02} 同符号和异符号两种情况,且由于 (17.6) 的 Z_{12} 必須为純虚数,所以又可分成

(a) Z_{01} 和 Z_{02} 同号时, $\coth \gamma \geq 1$ 的区域,

(b) Z_{01} 和 Z_{02} 异号时, $1 \geq \coth \gamma \geq 0$ 的区域。

但由于

$$e^{2\gamma} = e^{2\alpha + j2\beta} = \frac{\coth \gamma + 1}{\coth \gamma - 1}, \quad (21.2)$$

且考虑到 $\coth \gamma$ 为正实函数,故在右半平面,

$$|e^{2\gamma}| \geq 1 \quad \text{即} \quad \alpha \geq 0,$$

衰减不能为負。特別在虚軸上(i)的区域内,由于 $\coth \gamma$ 为純虚数,所以 $\alpha = 0$, 完全没有衰减。这个区域叫做通带。

如果是(ii)(a),則 $e^{2\gamma} > 1$, 即

$$\alpha > 0, \quad \beta = k\pi \quad (k \text{ 为整数}),$$

这叫做第一阻带。

如果是(ii)(b),則 $e^{2\gamma} < -1$, 即

$$\alpha > 0, \quad \beta = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

这叫做第二阻带。

这种电抗四端网络的特性具有明显的通带和阻带,在通带内,衰减完全等于零。但这是两个終端阻抗等于影象阻抗时的情况,实际上,由于普通都在一定电阻終端的情况下工作,所以实际的特性必須根据工作傳輸系数来计算。現在简单地考虑这两个終端电阻都是 1 的实际特性。由 (16.6) 可得工作傳輸系数

$$S_b = \frac{1}{2}(A + B + C + D), \quad (21.3)$$

对于电抗四端网络, 在虚轴上, A 和 D 是实数, B 和 C 是虚数, 所以

$$\begin{aligned} |S_b|^2 &= \frac{1}{4} \{ (A + D)^2 - (B + C)^2 \} \\ &= 1 + \frac{1}{4} \{ (A - D)^2 - (B - C)^2 \} \\ &= 1 + \frac{1}{4} \left\{ \left(\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} - \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \right)^2 \cosh^2 \gamma \right. \\ &\quad \left. - \left(\sqrt{Z_{01}Z_{02}} - \frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \right)^2 \sinh^2 \gamma \right\}. \end{aligned} \quad (21.4)$$

但在通带内, $\gamma = j\beta$, 所以上式括弧内成为

$$\left(\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} - \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \right)^2 \cos^2 \beta + \left(\sqrt{Z_{01}Z_{02}} - \frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \right)^2 \sin^2 \beta,$$

且由于 $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$, 当 β 增加时, 上式振动地取

$$\left(\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} - \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \right)^2 \quad \text{至} \quad \left(\sqrt{Z_{01}Z_{02}} - \frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \right)^2$$

之间的值, 当 Z_{01} 和 Z_{02} 都接近于 1 时这两值很接近。就是说, 在通带内, 影象阻抗如果接近于两个终端电阻, 则实际的衰减是很小的。

在第一阻带上, (21.4) 的括弧内成为

$$\left(\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} - \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \right)^2 \cosh^2 \alpha + \left(\left| \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \right| \right)^2 \sinh^2 \alpha,$$

而在第二阻带上, 它成为

$$\left(\left| \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right| + \left| \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \right| \right)^2 \sinh^2 \alpha + \left(\sqrt{Z_{01}Z_{02}} - \frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \right)^2 \cosh^2 \alpha,$$

设 x 为正数, 则由于

$$(x + x^{-1})^2 \geq 4,$$

故

$$|S_b|^2 \geq 1 + \sinh^2 \alpha = \cosh^2 \alpha > e^{2\alpha}/4,$$

即工作衰减比影象衰减不少于 6 分貝以上。因此在阻帶上，一般不考虑影象阻抗，只希望影象衰减充分大。根据上述，設計滤波器时，可以在通帶上使 Z_{01} 和 Z_{02} 与两个終端阻抗尽量接近，而在阻帶上，使 $\coth \gamma$ 尽量接近于 1。

可是，Piloty 曾研究过 Z_{01} , Z_{02} 和 $\coth \gamma$ 必須滿足的条件。这就是

(i) $Z_{01} \coth \gamma$ 和 $Z_{02} \coth \gamma$ 都是电抗函数。

(ii) 对于正实数的 λ , $\coth \gamma \geq 1$ 。

(iii) $\coth \gamma = 1$ 的根，除虛軸上的以外，都是偶数阶的。

(iv) 在 $\coth \gamma$ 为奇数阶 1 的第一阻帶和第二阻帶的分界点处， Z_{01} 和 Z_{02} 之中，有一个为 0 或 ∞ ，另一个为有限值。

虽然考虑这些条件可以进行上述的近似，但此时对于 Z_{01} 和 Z_{02} ，分別考虑

$$Z_{01} = Z_{02} \quad \text{以及} \quad Z_{01} = R_0^2 Z_{02}^{-1}$$

更为方便。前者是对称滤波器的情况，后者是反对称的情况。对于这种网络，(21.4) 的括弧内有一項消失了，但与分別考虑的 Z_{01} 和 Z_{02} 相比，其他的特性并没有变坏。

下面简单地叙述实际的设计方法。

§ 22 定 K 型和 m 誘导型方法^①

若有 n 个四端网络鎖联，各联接点处的影象阻抗彼此相等，則全体可看成为一个四端网络，它的影象阻抗为 Z_{01} 和 Z_{0n+1} ，影象傳輸量是

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n. \quad (22.1)$$

① 这也叫作 Zobel 的方法。

这种由各个网络的特性能够简单地表示出全体的特性是影象参数的一个特征，也是 Zobel 方法的基础。若干个已知特性的简单网络的鎖联，可以得出高級的特性。这种基本的网络就是“定 K 型”和“ m 誘導型”。

a) 定 K 型 图 22.1 的 L 型网络，若满足下列关系：

$$Z_1 Z_2 = R^2 \quad (R \text{ 为实常数}), \quad (22.2)$$

則称为定 K 型网络。

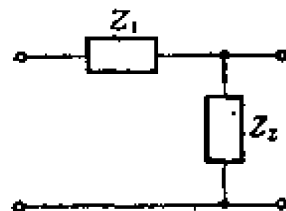


图 22.1

作为最简单的情况，可以考虑 $Z_1 = \lambda L$, $Z_2 = 1/\lambda C$ ，且設

$$\frac{L}{C} = R^2, \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad \Omega = \frac{\lambda}{j\omega_0} \left(= \frac{f}{f_0} \right),$$

則

$$\left. \begin{aligned} Z_{0r} &= R\sqrt{1-\Omega^2}, & Z_{0x} &= R/\sqrt{1-\Omega^2}, \\ \coth \gamma &= \sqrt{1-\frac{1}{\Omega^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (22.3)$$

就是說，这是截止频率为 $\Omega=1$ 的低通滤波器。但通带內的影象阻抗不是一定的，阻带內的衰减特性也不急峻。下面的 m 誘導型便能补这个不足。

b) m 誘導型

由于

$$Z_{01} = \sqrt{Z_{11}/Y_{11}}, \quad \coth \gamma = \sqrt{Z_{11}Y_{11}},$$

如果取参数为 $Z'_{11} = Z_{11}/m$, $Y'_{11} = Y_{11}/m$ 的网络，則这个网络的 Z_{01} 和原来的一样，但傳輸量变成下式中的 γ_m ：

$$\coth \gamma_m = \frac{\coth \gamma}{m}. \quad (22.4)$$

这种网络一般称为 m 誘導型网络。

图 22.1 的 m 誘導型网络如图 22.2 所示，且 (22.3) 式变成

$$\left. \begin{aligned} Z_{or} &= R\sqrt{1-\Omega^2}, \quad Z_{oxm} = R \frac{1-(1-m^2)\Omega^2}{\sqrt{1-\Omega^2}}, \\ \coth \gamma_m &= \frac{1}{m} \sqrt{1-\frac{1}{\Omega^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

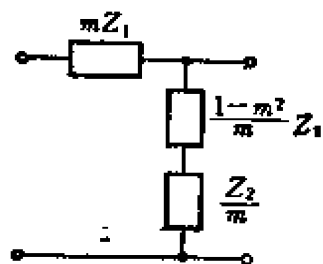


图 22.2

这个网络在有限的频率下有一点可使衰减为无穷大(衰减极点)。这频率就是使 $\coth \gamma = 1$ 的点,即

$$\Omega_m = \pm \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}. \quad (22.6)$$

由此可知,若对 m 在 0 与 1 之间适当地选一个值,则可使衰减极点出现在阻带的任意点上。如果 m 值很小,则衰减极点接近截止频率,并且衰减急剧上升,而在较大的 Ω 值上,衰减变小。因此,如果取若干个不同 m 值的这种网络,把它们在影象阻抗相匹配的情况下串联起来,则可得到总衰减很大并且急剧上升的一个网络。

至于影象阻抗,当然 Z_{or} 的一侧等于定 K 型的特性阻抗,另一侧的 Z_{oxm} , 当 $m=0$ 附近时,在通带内很宽的范围上比较接近于 R 。亦就是说, m 诱导型在阻抗特性上有所改善。因此,制作上述的复合滤波器时,在它的两端,可以联接具有上述阻抗的网络。

以上,我们在定 K 型的 Z_{or} 侧进行一定的变换,这就是所谓串联 m 变换,与此对应的,在 Z_{ox} 侧进行一定的变换,就得到并联 m 变换。

如果在这样得到的 m 诱导型网络的 Z_{oxm} 侧再进行 m 变换,那末一定得到更高一级阻抗特性的网络。但其衰减特性和一次变换的相同。

§ 23 对称和反对称滤波器

已经讲过,对称四端网络可以用两个阻抗 Z_0 和 Z_1 表达出来。

由此算出的影象参数为

$$\left. \begin{aligned} Z_{01} = Z_{02} &\equiv Z_0 = \sqrt{Z_a Z_b}, \\ 2 \coth \gamma &= \sqrt{Z_a/Z_b} + \sqrt{Z_b/Z_a}. \end{aligned} \right\} \quad (23.1)$$

从而得到

$$\coth \frac{\gamma}{2} = \sqrt{Z_a/Z_b}, \quad (23.2)$$

并可表成

$$Z_a = Z_0 \coth \frac{\gamma}{2}, \quad Z_b = Z_0 \tanh \frac{\gamma}{2}. \quad (23.3)$$

但由于 Z_a 和 Z_b 是独立任意选取的阻抗, 所以 Z_0 和 $\coth \frac{\gamma}{2}$ 除了相互必须为 Q 函数的这一限制外, 其他完全是自由的。因此, 通带上 Z_0 的逼近和阻带上 $\coth(\gamma/2)$ 的逼近是独立的。于是对于对称网络, 代替 $\coth \gamma$, 我们考虑 $\coth(\gamma/2)$ [或 $\tanh(\gamma/2)$], 可使问题变得非常简单。

对于截止(角)频率为 $\omega_c = 1$ 的标称化的低通滤波器, 首先考虑 Q 函数:

$$\left. \begin{aligned} Q_{2n}(\lambda) &= H \sqrt{\lambda^2 + 1} \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{\omega_{2\nu}^2 \lambda^2 + 1}{\omega_{2\nu-1}^2 \lambda^2 + 1} \right), \\ Q_{2n+1}(\lambda) &= H \sqrt{\lambda^2 + 1} \prod_{\nu=0}^n \left(\frac{\omega_{2\nu+1}^2 \lambda^2 + 1}{\omega_{2\nu}^2 \lambda^2 + 1} \right), \end{aligned} \right\} \quad (23.4)$$

$$1 = \omega_0 > \omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_{2n+1} > 0, \quad H > 0.$$

如果适当地选择各个 ω_μ 和 H , 则在截止频率以下, 可使所有这些 $Q_m(\lambda)$ 都接近于 1, 且 ①

$$\left. \begin{aligned} Z_0(\lambda) &= R Q_m(\lambda) \text{ 或 } R Q_m(\lambda)^{-1}, \\ \coth \frac{\gamma}{2} &= Q_{m'}(\lambda^{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

① (23.5) 式内 Q 函数的足标 m 表示 (23.4) 内的 $2n$ 或 $2n+1$; m' 表示与 m 不同的一个数。这里的 m 与上一节 m 诱导型的 m 以及 (23.6) 和以下的 m 各有不同的意义。——译者注

这里可看出一个变换

$$m = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{\lambda}, \text{ 即 } \lambda^2 = (m^2 - 1)^{-1}. \quad (23.6)$$

这是把 λ 平面虚轴上的通带映射到 m 平面的整个虚轴, 即成为下列形式:

$$Q_{2n}(\lambda^{-1}) = \frac{m}{H'} \prod_1^n \frac{m^2 + a_{2\nu}^2}{m^2 + a_{2\nu-1}^2}, \quad (23.7)$$

这对 m 而言是一个有理电抗函数。因此写出

$$e^\gamma = \frac{\coth(\gamma/2) + 1}{\coth(\gamma/2) - 1} = (-1)^\mu \frac{g(m)}{g(-m)}, \quad (23.8)$$

其中 μ 是 $g(m)$ 的次数, $g(m)$ 是 Hurwitz 多项式。但由于 λ 平面的阻带被映射到 m 平面上从 0 至 1 的一段实轴, 所以衰减极点即 $\coth(\gamma/2)$ 在虚轴上阻带内等于 1 的点就是 $g(m)$ 在 0 至 -1 之间的实零点。于是得到

$$e^\gamma = \prod_1^\mu \frac{m + m_\nu}{m - m_\nu} \quad (0 < m_\nu < 1). \quad (23.9)$$

若设

$$e^{\gamma_\nu} = \frac{m + m_\nu}{m - m_\nu},$$

则

$$\coth \frac{\gamma_\nu}{2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{m_\nu \lambda}.$$

就是说, (23.9) 的 γ 和许多 m 诱导型网络级联时的传输量是一致的。

因此, 在这个式子内, 可使 Q 函数在这实数域的任何点上等于 1。又若利用椭圆函数, 也能得到对 1 的 Tchebyscheff 近似, 但在本书内, 这些都省略了。

其次, 在反对称滤波器的情况下,

$$Z_{01}Z_{02} = R_0^2, \quad (23.10)$$

阻带全部是第二阻带。因此在阻带内

$$\coth \gamma \leq 1, \quad (23.11)$$

$\coth \gamma = 1$ 的零点是偶数次的。但在 $\lambda = \infty$, 必须是奇数次的。由此容易知道, 将有下列的形式:

$$e^{\lambda \gamma} = \prod \left(\frac{m + m_v}{m - m_v} \right)^2 \cdot \left(\frac{m + 1}{m - 1} \right). \quad (23.12)$$

以上所述的只是低通滤波器, 其他的滤波器也可同样处理, 还可以利用 § 32 的频率变换。

第5章 工作特性理論

影象参数方法已經发展成为一个完善的理論体系,严格的 Tschebyscheff 特性也容易选择出来。可是,影象特性并不代表实际使用状态下的特性。根据影象参数方法作出的最佳設計,从工作特性看来,必定不是最佳的。所以滤波器理論的下一个阶段,无论誰都会想到,必然是指定工作特性的設計。事实也正是如此,这一理論从 Brandt 的分波器理論开始以后,由 H. Piloty, W. Cauer, S. Darlington 等人几乎同时发展起来。下面叙述这一理論的概略。

§ 24 工作傳輸系数的性质

根据 § 16 所述的定义,工作傳輸系数 $S_b(\lambda)$ 必須具有下列性质:

- (i) $S_b(\lambda)$ 是一个在右半平面內沒有零点的实有理函数;
- (ii) 它在虛軸上的絕對值必須不小于 1。

这就是 § 8 所述的 S 函数的倒数。反之,如果給有滿足这些条件的函数,那末很容易說明具有这种工作傳輸系数的四端网络

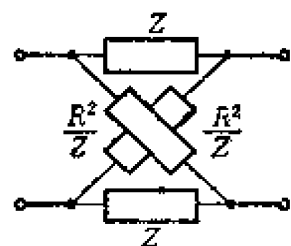


图 24.1

是存在的。因为从 S 函数的性质,滿足

$$S_b(\lambda) = \frac{Z + R}{Z - R} \quad (24.1)$$

的 Z 将是一个正实函数,于是这样的 $S_b(\lambda)$ 不外乎实现成图 24.1 形式的网络^①。

因此, $S_b(\lambda)$ 若写成形式

① 参考(19.6)式。

$$S_b(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}, \quad (24.2)$$

則由上述条件, $g(\lambda)$ 是一个 Hurwitz 多項式, $f(\lambda)$ 是次数不高于 $g(\lambda)$ 的多項式。

其次, 若写成

$$S_b(\lambda) = e^{\alpha + j\beta}, \quad (24.3)$$

則在虛軸上, $\alpha \geq 0$ 。对于正的常数 α_0 , 如果 $\alpha \geq \alpha_0$, 則

$$S_{b1}(\lambda) = e^{\alpha - \alpha_0 + j\beta} \quad (24.4)$$

仍能滿足工作傳輸系数的条件。这对应于从二端阻抗內分出电阻的操作。此外, 当 $S_b(\lambda)$ 在右半平面內具有极点时, 已經讲过, S 函数可作下列形式的分解:

$$S_b(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(-\lambda)} S_{b2}(\lambda), \quad (24.5)$$

$S_{b2}(\lambda)$ 在右半平面內沒有极点。其中 $\varphi(\lambda)$ 是 Hurwitz 多項式,

$$S_{b0}(\lambda) \equiv \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(-\lambda)} \quad (24.6)$$

在虛軸上的絕對值等于1, 这样对应的网络, 称为**全通网络**。(24.5) 式表示分出一个全通网络作为鎖联的网络。由于 $S_{b2}(\lambda)$ 与 $S_b(\lambda)$ 具有相同的衰减特性, 这个操作相当于二端网络情况下的电抗分离。但 $S_{b2}(\lambda)$ 在右半平面內沒有极点, 所以再分出以上的全通网络是不可能了。現在若将 $S_b(\lambda)$ 的零点和极点各写成 λ'_ν 和 λ''_μ , 則

$$\arg S_b(\lambda) = \sum_\nu \arg(\lambda - \lambda'_\nu) - \sum_\mu \arg(\lambda - \lambda''_\mu),$$

当 λ 在虛軸上从 $-j\infty$ 变到 $+j\infty$ 时, $\arg(\lambda - \lambda_0)$ 的值在 λ_0 位于左半平面內时增加 π , 而当 λ_0 在右半平面內时减少 π 。所以 $S_b(\lambda)$ 的相位变化量在右半平面內沒有极点的情况下为最小, 等于 $(n-m)\pi$ 。这里的 $(n-m)$ 表示无穷远点处极点的阶数。因此, 这样的网络叫做**最小相移网络**。

以上讲了工作傳輸系数的性质，至于电压傳輸系数和电流傳輸系数的性质几乎也是如此，只需用“不为零的正常数 O ”代替以前条件(ii)內的 1。

§ 25 电抗四端网络的傳輸系数

这里为了簡單起见，設两个終端电阻都是 1，且从 Cauer 研究的电流和电压傳輸系数出发。首先，由(16.1)式，电流傳輸系数等于

$$M(\lambda) = \frac{1 + Z_{22}}{Z_{12}}. \quad (25.1)$$

在它的分子和分母上同乘以 Z_{22} 的分母多项式，則变成

$$M(\lambda) = \frac{g_m(\lambda)}{f_m(\lambda)}, \quad (25.2)$$

$g_m(\lambda)$ 是 Hurwitz 多项式， $f_m(\lambda)$ 是次数不高于 $g_m(\lambda)$ 的偶或奇多项式。其中，分母和分子的公因子并不約去。下面为了簡單起见，在沒有特別必要的时候，将 $M(\lambda)$ ， $g(\lambda)$ 各記为 M ， g ，将 $M(-\lambda)$ ， $g(-\lambda)$ 各記为 M_* ， g_* 。

可是，如果給定了(25.2)形式的函数，則能証明具有这样的电流傳輸函数的电抗四端网络是存在的。我們可将分子分成偶部和奇部：

$$g_m = v_m + u_m. \quad (25.3)$$

若 f_m 为偶多项式，則取

$$\left. \begin{aligned} &Z_{22} = v_m / u_m, \quad Z_{12} = f_m / u_m, \\ &\text{若 } f_m \text{ 为奇多项式，則取} \\ &Z_{22} = u_m / v_m, \quad Z_{12} = f_m / v_m. \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

由于 Z_{22} 是电抗函数， Z_{12} 为除 Z_{22} 的极点外沒有其他极点的奇函数，所以具有这种参数的电抗四端网络是可实现的。可是，单从 Z_{22} 和 Z_{12} 还不能唯一地决定这个网络，这种网络的 Z_{11} 一般为下

列的形式:

$$Z_{11} = Z_{110} + Z, \quad (25.5)$$

其中 Z_{110} 是对 Z_{22} 和 Z_{12} 而言能满足 § 20 的留数条件的最小电抗, Z 为任意的电抗。(25.4) 还可化为下列形式:

$$Z_{22} = \frac{M + M_*}{M - M_*}, \quad Z_{12} = \frac{2}{M - M_*}. \quad (25.6)$$

同样, 对于电压传输系数, 亦有

$$N = \frac{1 + Y_{22}}{-Y_{12}} = \frac{g_n}{f_n}, \quad (25.7)$$

$$Y_{22} = \frac{N + N_*}{N - N_*}, \quad Y_{12} = \frac{2}{N - N_*}. \quad (25.8)$$

如果 M 和 N 两者都已规定, 则网络亦唯一地决定了。但是, 由 (25.6) 和 (25.8), 它的链联矩阵为

$$K = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} N + N_* & N - N_* \\ M - M_* & M + M_* \end{pmatrix}, \quad (25.9)$$

其中 M 和 N 不能独立地决定出来, 它们之间必须有下列的关系。关系之一为: 表示输入阻抗的函数

$$Z = \frac{N}{M} \quad (25.10)$$

是一个正实函数, 还有一个互易性的条件 $|K| = 1$, 即

$$MN_* + M_*N = 2. \quad (25.11)$$

如果取 M 和 N 的分母的最小公倍多项式为 f , 且写成

$$M = m/f, \quad N = n/f, \quad (25.12)$$

则四端网络由三个多项式 m , n 和 f 所决定。于是, 实现条件可化为

- (i) m , n 和 f 在右闭半平面内没有公共零点;
- (ii) $Z = n/m$ 为正实函数;
- (iii) f 是偶或奇多项式;

$$(iv) \quad mn_* + m_*n = 2ff_*, \quad (25.13)$$

由此推知, 鎖联矩陣为

$$K = \frac{1}{2f} \begin{pmatrix} n \pm n_* & n \mp n_* \\ m \mp m_* & m \pm m_* \end{pmatrix}, \quad (25.14)$$

其中 f 为偶时取上面的符号, f 为奇时取下面的符号。

其次考虑工作傳輸系数。比較(16.6)式, 可得

$$S_b = \frac{M+N}{2} = \frac{m+n}{2f} = \frac{g}{f}, \quad (25.15)$$

其中

$$g = (m+n)/2 \quad (25.16)$$

是一个 Hurwitz 多項式。因为

$$Z+1 = \frac{m+n}{m}$$

是正实函数, 且在虚軸上沒有零点, 因此, 如果 $m+n$ 在右閉半平面內有零点, 那末 m 必須有同样的零点。从而 n 也必須有同样的零点, 在(25.13)內 f 也要有这种零点。这就違反了条件(i)。

单是 N 不能完全决定一个四端网络, 必須与 M 組合以后始能完全决定, 現在再考虑一个与 S_b 对应的反射傳輸系数 T 是方便的。由(16.7), 可写出

$$T = \frac{N+M}{N-M} = \frac{n+m}{n-m} = \frac{g}{h}, \quad (25.17)$$

其中

$$h = (n-m)/2. \quad (25.18)$$

这样, S_b 和 T 由三个多項式 g , h 和 f 所决定。反之, 由此可求出 n 和 m :

$$\left. \begin{aligned} n &= g+h, \\ m &= g-h. \end{aligned} \right\} \quad (25.19)$$

如果把它們代入(25.13)式內, 則得

$$gg_* = hh_* + ff_* \quad (25.20)$$

上式也可写成

$$(S_b S_{b*})^{-1} + (TT_*)^{-1} = 1, \quad (25.21)$$

它说明传输到输出端的功率与输入端反射的功率之和等于电源供给的功率,亦就是说,四端网络内没有功率消耗。

可是,多项式 m , n 和 f 可以表成 g , h 和 f , 所以对于 g , h 和 f , 可直接写出实现条件是

(i) g 为 Hurwitz 多项式;

(ii) f 为偶或奇多项式;

(iii) $gg_* = hh_* + ff_*$.

其次,如果令

$$\varphi = h/f, \quad (25.22)$$

则有

$$S_b S_{b*} = 1 + \varphi \varphi_*. \quad (25.23)$$

由于在虚轴上,

$$e^{2\alpha} = 1 + \varphi(j\omega) \varphi(-j\omega), \quad (25.24)$$

所以,四端网络的衰减特性完全被 φ 规定出来。因此,设计滤波器等时,只要求出具有给定衰减特性的 φ , 由此就可求出满足实现条件的 S_b 。根据这种意义, φ 可叫做特性函数。为了求出可实现的 S_b 的条件, 由下面的叙述可知, 必须 φ 为实系数的有理函数, 此外没有任何其他的限制。

给定一个实系数有理函数 φ 后, 在它的分母分子上乘以适当的多项式, 可使分母成为偶或奇多项式, 其中取最低次的为 f_0 , 则

$$\varphi = \frac{h_0}{f_0}. \quad (25.25)$$

这里 f_0 的最高次项的系数设为正。对于这个 h_0 和 f_0 , 由 (25.20) 式可求出 Hurwitz 多项式 g_0 。此时, 相应于 g_0 的最高次项系数为 1 的 h_0 和 f_0 就决定出来。

因此,根据这样的 φ ,可以唯一地求出 g_0, h_0 和 f_0 , 同样,利用 φ , 可以求出一般的函数为

$$\left. \begin{aligned} h &= \pm h_0 \psi \psi_*, & f &= \pm f_0 \psi \psi_*, \\ g &= g_0 \psi^2, \\ S_b &= \pm S_{b0} \psi / \psi_*, & T &= \pm T_0 \psi / \psi_*. \end{aligned} \right\} \quad (25.26)$$

从而

其中 ψ 是最高次系数为 1 的任意 Hurwitz 多项式。结果,电抗四端网络由一个任意的实系数有理函数 φ 及一个 Hurwitz 多项式 ψ 决定出来。

具有这个特性函数的 M, N, Z_{11} 和 Z_{22} 可写成

$$M = S_b - \varphi, \quad N = S_b + \varphi, \quad (25.27)$$

$$Z_{11} = \frac{S_b + S_{b*} + \varphi + \varphi_*}{S_b - S_{b*} - \varphi + \varphi_*}, \quad Z_{22} = \frac{S_b + S_{b*} - \varphi - \varphi_*}{S_b - S_{b*} - \varphi + \varphi_*}. \quad (25.28)$$

由此知道,如果令

$$S_b \rightarrow S_b, \quad \varphi \rightarrow -\varphi_*,$$

那末, Z_{11} 和 Z_{22} 互换, 变成互换输入和输出端。因此,

$$\varphi_* = -\varphi, \quad (25.29)$$

即 φ 为奇函数时, 这表示为一个对称四端网络。若

$$\varphi_* = \varphi, \quad (25.30)$$

即 φ 为偶函数时, 则

$$A_z = \frac{S - S_* + \varphi - \varphi_*}{S - S_* - \varphi + \varphi_*} = 1, \quad (25.31)$$

这是反对称四端网络。

在对称的情况下, 又可分成下列两种:

(i) f 为偶, h 为奇。

$$\left. \begin{aligned} gg_* &= f^2 - h^2, \\ (Z) &= \frac{1}{u-h} \begin{pmatrix} v & f \\ f & v \end{pmatrix}, \quad (Y) = \frac{1}{u+h} \begin{pmatrix} v & -f \\ -f & v \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (25.32)$$

(ii) f 为奇, h 为偶。

$$\left. \begin{aligned} gg_* &= -f^2 + h^2, \\ (Z) &= \frac{1}{v-h} \begin{pmatrix} u & f \\ f & u \end{pmatrix}, \quad (Y) = \frac{1}{v+h} \begin{pmatrix} u & -f \\ -f & u \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (25.33)$$

在反对称情况下, f 和 h 都是偶函数, 故

$$\left. \begin{aligned} gg_* &= f^2 + h^2, \\ (Z) &= \frac{1}{u} \begin{pmatrix} v+h & f \\ f & v-h \end{pmatrix}, \quad (Y) = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} v-h & -f \\ -f & v+h \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (25.34)$$

以上是一个要领, 如果决定了一个具有给定特性的 φ (或直接为 S_0), 则由此求网络综合上必要的阻抗矩阵等量时, 只需进行机械的计算即可。

§ 26 在二端网络综合理论上的应用

应用工作特性理论, 可以合成一个电阻终端的电抗四端网络形式的二端网络。

假设给定一个阻抗

$$Z = \frac{n_0}{m_0},$$

作出 $m_0 n_{0*} - m_{0*} n_0$ 。由于它在虚轴上不为负, 所以虚轴上的零点是偶数阶的。如果在虚轴以外有奇数阶的零点, 则将左半面的零点集合成一个 Hurwitz 多项式 g_0 , 取

$$n = g_0 n_0, \quad m = g_0 m_0,$$

再分解成

$$mn_* - m_*n = 2ff_*,$$

其中 f 为偶或奇多项式。由于这样求出的 m, n 和 f 满足电抗四端网络的条件, 因此, 可以作出这个网络, 再在它的终端接一个电阻, 就得到了实现给定 Z 的网络。

第6章 逼近理論

§ 27 逼近的意义和方法

网络設計的一个重要部分是逼近理論。这就是利用适当个数的元件来实现网络函数，而决定与希望的特性尽量逼近的特性的問題。这是經常要考虑并且是非常困难的問題，要一般地討論几乎是不可能的。說起来，逼近本身就是一个不明确的概念，象最佳逼近是什么，很难作出籠統的規定，即使可以規定，要求出在規定的标准上是最佳的，一般也不容易。比較簡單和可以得到解答的，只是象滤波器那样极特殊的情况。当然，对于一般的特性，逼近理論已經研究得很多，考虑了多項式逼近，正交函数逼近，应用位論的逼近等等，这里只能簡單地介紹其中的一部分。

网络特性在不預先告訴時可以用傳輸系数表出，視情况的不同，采用这种傳達函数的倒数是方便的。

由于所給的仅是普通实頻率的特性，所以取 ω 比 λ 更方便。此外，它的特性多半只是指定衰减特性，在这种情况下，可以考虑所謂振幅的平方特性 $|S_0|^2 = e^{-2\alpha}$ ，对它可以用 ω 的有理偶函数来逼近。

还有，对于給定的函数 F ，一般用 F^+ 表示逼近的有理函数。

§ 28 Fourier 級数

正交函数的方法是逼近的有效手段，在网络函数的情况下，所得的函数必須是有理函数。因此在多数情况下，需要进行适当的变量变换才能达到目的。Fourier 級数的情况可分为下列两种：

(i) 逼近范围为有限的情况。为了簡單起見，取 $-1 < \omega < 1$

为逼近范围,并作变换

$$\omega = \sin(\theta/2), \quad (28.1)$$

把它变换到 $-\pi < \theta < \pi$ 范围上。由于振幅平方特性是 ω 的偶函数,所以利用 Fourier 余弦级数可作出下列形式的逼近:

$$e^{2\alpha} = \sum_0^n c_\nu \cos \nu\theta. \quad (28.2)$$

但由 (28.1), 可写出

$$e^{j\theta/2} = j(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}), \quad e^{-j\theta/2} = -j(\omega - \sqrt{\omega^2 - 1})$$

以及

$$\cos \nu\theta = (-1)^\nu \{(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1})^{2\nu} + (\omega - \sqrt{\omega^2 - 1})^{2\nu}\} / 2, \quad (28.3)$$

这是 ω 的有理偶多项式。实际上,它是偶次的 Tschobyscheff 多项式。因此,这个方法就是在 Tschobyscheff 多项式上的逼近。

(ii) 逼近范围为全部频率的情况。此时可以用变换

$$\omega = \tan(\theta/2) \quad (28.4)$$

把 $-\infty < \omega < \infty$ 变到 $-\pi < \theta < \pi$, 然后再用 Fourier 余弦级数来逼近。

这种情况还有逼近 $e^{2\alpha}$ 与 $e^{-2\alpha}$ 之分,通常取后者。可是由 (28.4),

$$e^{j\theta} = \frac{1+j\omega}{1-j\omega}, \quad (28.5)$$

于是可得

$$\cos \nu\theta = \frac{(1+j\omega)^{2\nu} + (1-j\omega)^{2\nu}}{2(1+\omega^2)^\nu}. \quad (28.6)$$

这是 ω 的实系数偶有理函数。然而,利用这种逼近所得的函数,由上式可知,只在 $\omega = \pm j$ (即 $\lambda = \pm 1$) 处有极点。为了避免它,我们可以预先在需要逼近的函数上乘以

$$\frac{\sum_0^n a_\nu \omega^{2\nu}}{(1+\omega^2)^n} \quad (28.7)$$

形式的函数,如果再用它除上述方法所得的逼近函数,則就把最后結果的分母作成 $\sum a_\nu \omega^{2\nu}$ 形式。但若对这个多項式的选择不作什么規定,則好好的 Fourier 級数也会使效果減半。到現在,还没有好的选择多項式的簡單方法,有一个方法是先对給定特性的倒数用上述方法进行逼近,再把所得的函数作为(28.7)的函数使用。

以上只对傳輸系数(或傳达函数)的絕對值进行逼近,亦就是沒有相位問題的逼近方法,Redheffer 曾发表了同时逼近傳达函数的实部和虛部的方法。这方法是用

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \quad (28.8)$$

的幂級数来逼近傳达函数 $e^{-j\theta}$, 取

$$e^{-j\theta} = A(\theta) - jB(\theta)$$

并求出使

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left\{ A(\theta) - \sum_{\nu=0}^n a_\nu \cos \nu\theta \right\}^2 + \left\{ B(\theta) - \sum_{\nu=0}^n a_\nu \sin \nu\theta \right\}^2 \right] d\theta \quad (28.9)$$

为最小的 a_ν 。这也是求解方程組 $\partial T / \partial a_\nu = 0$ 。

§ 29 位綫的应用

平面上一点处的二維电位可表成

$$V = - \sum q_\nu \log \rho_\nu + \text{常数}, \quad (29.1)$$

其中 q_ν 是点电荷(正确地說,是和这平面直交的綫电荷的密度), ρ_ν 是各个电荷至观测点之間的距离。在这平面上,考虑一个能适当地决定坐标的复数平面,取各个电荷的坐标为 λ_ν , 观测点的坐标为 λ , 再考虑函数

$$W = - \sum q_\nu \log (\lambda - \lambda_\nu) + \text{常数}, \quad (29.2)$$

它的实部就是(29.1)所示的电位。亦即是可以写出

$$W = V + j\Psi, \quad (29.3)$$

它的虚部叫做**流函数**。

W 称为**复数电位**，它是解析函数，所以能够满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = -\frac{\partial V}{\partial \omega} = E_\omega, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = -E_\sigma, \quad (29.4)$$

这里 E_ω 和 E_σ 各表示相应方向上的电场强度。

利用流函数，穿过平面上两点 λ_0 和 λ 間联綫的通量可表成下列形式：

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} (-E_\omega d\sigma + E_\sigma d\omega) = \int \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} d\sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} d\omega \right) \\ &= \Psi(\lambda_0) - \Psi(\lambda). \end{aligned} \quad (29.5)$$

現設电荷分布在图 29.1 所示的綫段上， $q(\lambda)$ 表示由 λ_0 至 λ 之間的电荷。在这条綫的兩側，电位是連續的，流函数不連續。令 Ψ_1 表示其一側的值， Ψ_2 表示另一側的值，則在图示的 λ_0 至 λ 間的綫段上計算通量，采用 Gauss 定理，得到

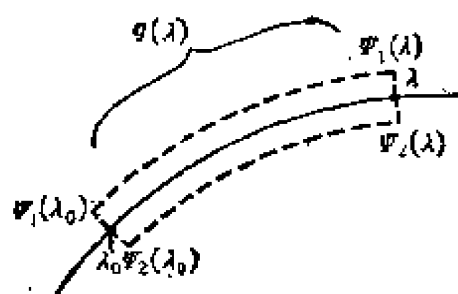


图 29.1

$$\{\Psi_1(\lambda) - \Psi_1(\lambda_0)\} - \{\Psi_2(\lambda) - \Psi_2(\lambda_0)\} = 2\pi q(\lambda). \quad (29.6)$$

于是从流函数可求出电荷分布。

可是，若傳輸系数的零点为 $\lambda'_1, \lambda'_0, \dots$ ，极点为 $\lambda''_1, \lambda''_2, \dots$ ，則傳輸量函数可写成

$$\begin{aligned} \gamma &= F(\lambda) = \log K \frac{(\lambda - \lambda'_1)(\lambda - \lambda'_2) \cdots}{(\lambda - \lambda''_1)(\lambda - \lambda''_2) \cdots} \\ &= \gamma_0 + \sum \log(\lambda - \lambda'_v) - \sum \log(\lambda - \lambda''_v). \end{aligned} \quad (29.7)$$

把它和 (29.2) 式相比較，可以知道有下列的对应关系：

傳輸量函数——复数电位，

衰减量——电位，
 相位量——流函数，
 零点——单位負电荷，
 极点——单位正电荷。

傳輸量的逼近問題，就是決定正負电荷的分布問題，使虛軸上的电位(或流函数)逼近給定的特性。其中，根据傳輸系数的性质，要求有下面的条件：

- (i) 电荷是关于实軸对称地分布着的，
- (ii) 負电荷限在左半平面內，
- (iii) 有限范围的总电荷量必須不为正。

特別对于只是衰减量問題的情况，右半平面內出現負电荷没有什么区别。原因是可以把这些电荷对虛軸对称地搬至左半平面，仍得出与衰减沒有影响但满足条件的函数。或者相当于利用偶函数逼近 $e^{2\alpha}$ ，可以用左右对称的电荷分布来逼近 2α 。

可是，决定这种电荷分布的步骤，归结于下列两个阶段。第一，利用平面上适当綫段（例如包圍逼近区域的閉曲綫）上的連續电荷分布，对特性进行逼近；第二，用单位点电荷分布来代替这种連續电荷。这就是把綫段分为若干部分，取这区間上的电荷量为单位量，再用区間中央的单位点电荷代替。进行第一步时，首先在包圍逼近区域的适当边界綫的内部作出适当的正則逼近函数

$$F_i(\lambda) = V_i(\lambda) + j\Psi_i(\lambda),$$

它可以是幂級数或其他函数。其次作出外部函数

$$F_e(\lambda) = V_e(\lambda) + j\Psi_e(\lambda),$$

在边界綫上取 $V_i(\lambda) = V_e(\lambda)$ ，且在外部区域上正則或定出有多少个对数奇点。于是从(29.6)，由 Ψ_i 和 Ψ_e 求出边界綫上的电荷分布。

与这問題相当的，是屢見的利用所謂保角映射能够简单地解

出来的問題。这种例子,将在 § 30 的 Tschebyscheff 型濾波器部分內說明。

以上叙述了两种一般的逼近方法,对于具有象濾波器等单纯形式特性的一类問題,还可求出一些表成公式的函数。下面讲述有关它的几件事。

§ 30 濾 波 器

在濾波器、分波器等問題中,大多数情况只是实頻率上的衰减特性問題。此时取

$$S_v S_{b*} = 1 + \varphi \varphi_* \quad (30.1)$$

的表达形式,由于在虚軸上的通帶內希望 $\varphi \varphi_*$ 尽可能地小,在阻帶內,希望它尽可能地大,所以 $\varphi \varphi_*$ 的零点和极点都在虚軸上(包括无穷远点)是最有效的。如果这样选择,則 φ 是偶或奇的有理函数,一般可表成

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= h \frac{(\lambda^2 + \omega_1^2) \cdots (\lambda^2 + \omega_n^2)}{(\lambda^2 + \omega_{\infty 1}^2) \cdots (\lambda^2 + \omega_{\infty m}^2)}, \\ \text{或} \quad \varphi &= h \frac{\lambda(\lambda^2 + \omega_1^2) \cdots (\lambda^2 + \omega_n^2)}{(\lambda^2 + \omega_{\infty 1}^2) \cdots (\lambda^2 + \omega_{\infty m}^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (30.2)$$

在不需要考虑复数平面的时候, λ 可用 ω 表出,

$$\varphi(j\omega) \varphi(-j\omega) = \varphi_1(\omega)^2, \quad (30.3)$$

即 $\varphi_1(\omega) = \varphi(j\omega)$ 或 $j\varphi(j\omega)$

是 ω 的偶或奇的实系数有理函数。

下面,我們举出几个有代表性的特性函数。为了方便,只限于討論低通濾波器。对于高通或带通濾波器,可以利用 § 32 所述的頻率变换,也可以不用頻率变换,要推广一些想法也是容易的。

(i) Wagner 特性①。这是在逼近点附近具有最平坦性质的

① 这里采用濾波器的发明者 K. W. Wagner 的名字。美国和英国的文献中常称为 Butterworth 特性。

特性,亦即是,在这一点上的导数以及到某个可能限定的高阶导数都等于零。对于低通滤波器,就是下列的形式:

$$\varphi(\omega) = (\omega/\omega_0)^n. \quad (30.4)$$

特性函数的零点集中在頻帶的中心。在上式內,衰减极点都集中在无穷远点,所以阻帶也具有 Wagner 特性。

(ii) Tschebyscheff 特性。

这里关于 Tschebyscheff 逼近的意义先作简单的說明。此时表征逼近的良好程度的标准是取所考虑区域上的最大偏差。因此,用一个含有若干个自由参数的函数 F 逼近一个給定的函数 F_0 时,就是去决定指定范围上使 $\max |F - F_0|$ 的值为最小的各个参数。如此得出的函数偏差如图 30.1 所示,在指定范围上,当然如想象的那样,其中等于最大值的数目至少与参数的数目有关。

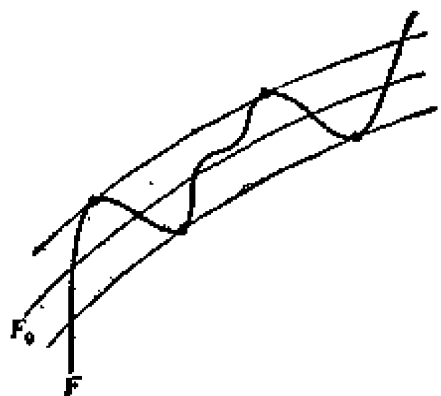


图 30.1

在滤波器的情况下,在通帶上希望逼近于零,在阻帶上希望逼近于 ∞ ,在这两个帶上的逼近将在以后叙述,現在先考虑只对通帶的逼近。这里为了简单起见,衰减极点都假定在无穷远点,亦就是特性函数可以表成多项式的情况,于是从通帶內偏差的各个

极大值全相等的条件,列出微分方程再求解,也可以利用下面的位論方法求出解答。

首先,利用变换

$$\lambda = \sinh p \quad (\omega = \sin \theta, \quad p = j\theta) \quad (30.5)$$

把整个 λ 平面映射到图 30.2 的带状部分。(上式是周期函数,所以正确地說,映射到它的上下都有相同幅度的带状部分。)这样就把通帶 $(-j, +j)$ 映射到 p 平面上 $(-j\frac{\pi}{2}, +j\frac{\pi}{2})$ (正确地說,整个虛軸)。可是,如果把电荷均匀分布在 p 平面的虛軸上,那末就有一

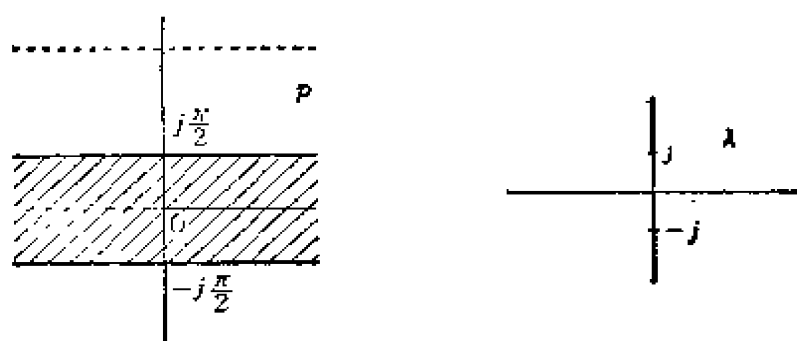


图 30.2

定的电位。若把 $(-j\pi/2, +j\pi/2)$ 区間分成 n 等分, 在各个中点放置单位电荷来逼近連續的电荷, 則虛軸上的电位就成为 Tschescheff 型的。此时可得下列函数:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\lambda) &= H \prod_1^m (\lambda^2 + \omega_\nu^2), \\ \omega_\nu &= \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\nu-1}{2m} \quad (n=2m), \\ \text{或} \\ \varphi(\lambda) &= H\lambda \prod_1^m (\lambda^2 + \omega_\nu^2), \\ \omega_\nu &= \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\nu}{2m+1} \quad (n=2m+1). \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

但 $\sinh p$ 函数的零点在虛軸上等間隔地排列着, 在有限区域内, 它是正則函数。另一方面, 电荷也在虛軸上等間隔地分布着, 它們的間隔設为 $1/n$, 則可写出

$$\left. \begin{aligned} n \text{ 为偶数时} \quad \varphi(\lambda) &= H' \cosh np, \\ n \text{ 为奇数时} \quad \varphi(\lambda) &= H' \sinh np. \end{aligned} \right\} \quad (30.7)$$

这是一种中間变量的形式。

如果取变量 ω 为

$$\omega = \cos \theta, \quad (30.8)$$

則不拘 n 的偶或奇, 都可表成

$$\varphi_1(\omega) = H' \cos n\theta, \quad (30.9)$$

这里

$$T_n \equiv \cos n\theta = \frac{1}{2} \{ (\omega + \sqrt{\omega^2 - 1})^n + (\omega - \sqrt{\omega^2 - 1})^n \} \quad (30.10)$$

即是所謂 Tschébyscheff 多項式。

求出了这种特性函数,其次从

$$S_b S_{b*} = 1 + \varphi \varphi_*$$

来求出 S_b , 这可将右边进行因式分解,象下面那样求出来。例如, n 为奇数时, 在表示 $\sinh^2 np$ 在 p 平面上零点的图 30.3 虚軸上, 二重零点在 $\pm j\nu\pi/n$, 若在其上加一个常数, 取 $c^2 + \sinh^2 np$ 形式, c^2 从零逐渐增加, 則图中的零点将向左右一条直綫上移动。因此, $1 + H^2 \sinh^2 np$ 的零点是 $\pm a \pm j\nu\pi/n$ 的形式。把它在 λ 平面排

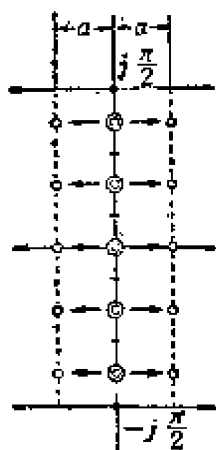


图 30.3

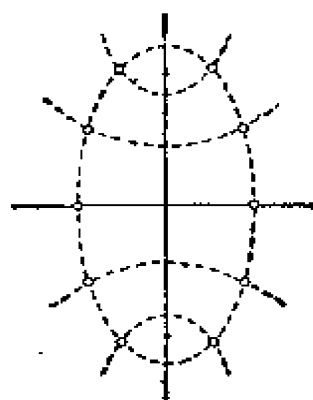


图 30.4

列于图 30.4 的橢圓上, 和 § 30 所述的方法相比, 正好相当于橢圓包圍了通帶, 橢圓內有一定的电位, 橢圓周上分布着电荷且已被量子化。因此, 单考虑左半面 S_b 的零点, 成为

$$-\sinh(a \pm j\nu\pi/n). \quad (30.11)$$

由此得出

$$\left. \begin{aligned} S_b &= A(\lambda + a_0) \prod (\lambda^2 + 2a_{2\nu}\lambda + \rho_{2\nu}^2), \\ a_0 &= \sinh a, \\ a_{2\nu} &= a_0 \cos \frac{\nu\pi}{n}, \\ \rho_{2\nu}^2 &= a_0^2 + \sin^2 \frac{\nu\pi}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (30.12)$$

按照(30.5),

$$p = \sinh^{-1} \lambda, \quad (30.13)$$

这不外是定 K 型的影象傳輸量。于是 np 表示 n 个定 K 型鎖联网络的影象傳輸量。一个四端网络的影象傳輸量一般取为 P 时, 考虑

$$\varphi = H \cosh P \quad \text{或} \quad \varphi = H \sinh P. \quad (30.14)$$

由于在通带上 P 为純虛数, φ 就在 $\pm H$ 之間振動, 成为 Tscheybyscheff 特性, 而在阻带上, 它的絕對值比 H 大, 特別在衰减极点处, 它成为 ∞ 。可是这样的函数, 要成为特性函数, 必須是有理函数。但由

$$\cosh P = \frac{\coth P}{\sqrt{\coth^2 P - 1}}, \quad \sinh P = \frac{1}{\sqrt{\coth^2 P - 1}}, \quad (30.15)$$

为了使它为有理函数, $\coth P$ 在虛軸上的单位点必須是偶数阶的, 又在通带和阻带的边界上, 左式的情况下必須为 ∞ , 右式的情况必須为零。換言之, 为了使 $\cosh P$ 成为有理函数, 阻带必須全是第一阻带, 为了使 $\sinh P$ 为有理函数, 必須只有第二阻带。前者是对称滤波器的傳輸量, 后者是反对称的傳輸量。利用(23.6)表出的 m , 在对称的場合, 由于

$$e^{2P} = \prod \left(\frac{m + m_i}{m - m_i} \right)^2, \quad (30.16)$$

所以

$$\cosh P = \frac{\prod (m + m_i)^2 + \prod (m - m_i)^2}{\prod (m^2 - m_i^2)}. \quad (30.17)$$

在反对称的場合, 由于

$$e^{2P} = \prod \left(\frac{m + m_i}{m - m_i} \right)^2 \cdot \left(\frac{m + 1}{m - 1} \right), \quad (30.18)$$

所以

$$\sinh P = \lambda \frac{(m + 1) \prod (m + m_i)^2 - (m - 1) \prod (m - m_i)^2}{\prod (m^2 - m_i^2)}, \quad (30.19)$$

于是从一个滤波器的影象傳輸量,导出了 Tschebyscheff 型特性函数。此时,所取的滤波器称为**参考滤波器**。利用这种方法,可以設計出任意点上有极点的、在通带上为 Tschebyscheff 特性的滤波器。如果取阻带上 Tschebyscheff 特性的滤波器为参考滤波器,則通带和阻带上都能具有 Tschebyscheff 特性,这就导出下面要讲的位論。

(iii) 联合 Tschebyscheff 特性。这对于滤波器而言是最希望有的特性,由于篇幅的限制,这里只說明其要点^①。

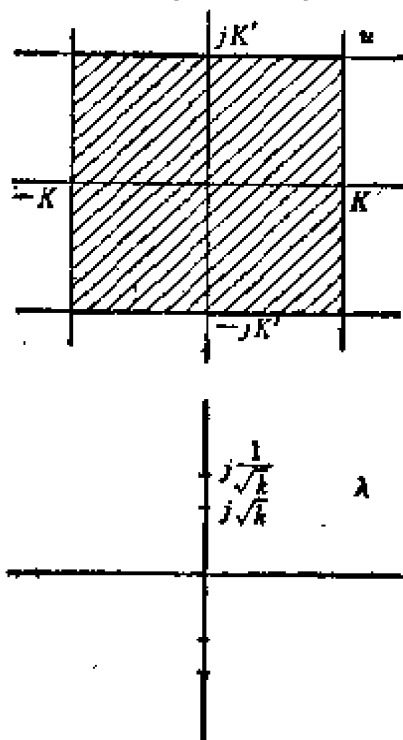


图 30.5

首先,取 $0 \leq \omega \leq \sqrt{k}$ 为通带, $1/\sqrt{k} \leq \omega$ 为阻带。这个 k 称为**頻带系数**。这里可以考虑椭圆函数

$$\lambda = j\sqrt{k} \operatorname{sn}(u, k) \quad (30.20)$$

的映射,图 30.5 那样的整个 λ 平面被变换到 u 平面的 $\pm K$, $\pm jK'$ 之間的矩形区域。(正确地說,还有这区域的上下左右周期地反复。)通带映射到实軸上,阻带映射到通过 $\pm jK'$ 的与实軸平行的直綫上。如果考虑和以前同样的电荷且把它量子化,則結果特性函数的零点在 $n=2m$ 时为

$$\left. \begin{aligned} \pm j\Omega_{2\nu-1} &= \pm j\sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{2\nu-1}{n}K, k\right) \quad (\nu=1, 2, \dots, m), \\ \text{极点为} \\ \pm j\Omega_{\infty, 2\nu-1} &= \pm j\sqrt{k} \operatorname{sn}\left(\frac{2\nu-1}{n}K + jK', k\right) \\ &= \pm j/\Omega_{2\nu-1}. \end{aligned} \right\} \quad (30.21)$$

① 关于这里的公式推导,有兴趣的讀者可参考 W. Oauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 1954 年,第二版第六章。——譯者注

于是

$$\varphi = H \prod_{\nu=1}^m \left(\frac{\lambda^2 + \Omega_{2\nu-1}^2}{1 + \Omega_{2\nu-1}^2 \lambda^2} \right), \quad (30.22)$$

而在 $n=2m+1$ 时,

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= H \lambda \prod_{\nu=1}^m \left(\frac{\lambda^2 + \Omega_{2\nu}^2}{1 + \Omega_{2\nu}^2 \lambda^2} \right), \\ \Omega_{2\nu} &= \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{2\nu}{n} K, k \right). \end{aligned} \right\} \quad (30.23)$$

又和推导(30.7)式一样,可得到中间变量形式:

n 为奇数时,

$$\varphi = H' \sqrt{k_1} \operatorname{sn} \left(n \frac{K_1}{K} u, k_1 \right),$$

n 为偶数时,

$$\varphi = H' \sqrt{k_1} \operatorname{sn} \left(n \frac{K_1}{K} u + K_1, k_1 \right).$$

(30.24)

其中 $\operatorname{sn}(\dots, k_1)$ 是满足

$$K'_1/K_1 = nK'/K \quad (30.25)$$

的并取 K_1 和 K'_1 的椭圆函数。

最后,可求出与(30.12)对应的 S_b :

n 为奇数时,

$$S_b = A(\lambda + a_0) \prod_{\nu=1}^m \frac{\lambda^2 + 2a_{2\nu}\lambda + \rho_{2\nu}^2}{1 + \omega_{2\nu}^2 \lambda^2},$$

n 为偶数时,

$$S_b = A \prod_{\nu=1}^m \frac{\lambda^2 + 2a_{2\nu+1}\lambda + \rho_{2\nu+1}^2}{1 + \omega_{2\nu+1}^2 \lambda^2}.$$

(30.26)

其中

$$a_0 = -j\sqrt{k} \operatorname{sn}(ja, k),$$

$$a_\nu = \frac{a_0 \operatorname{cn}(\nu K/n, k) \operatorname{dn}(\nu K/n, k)}{1 + a_0^2 \omega_\nu^2},$$

$$\rho_\nu^2 = \frac{a_0^2 + \omega_\nu^2}{1 + a_0^2 \omega_\nu^2}.$$

(30.27)

§ 31 頻 率 變 換

1) 頻帶的變換 为了簡單起見,以上全限于討論低通型的濾波器,对于高通和帶通型的,也适用同样的方法。但在高通和上下特性对称的帶通情況下,利用頻率變換,可以簡單地由低通的情形推导出来。頻率變換的原理是“如果把一个網絡的網絡函数的变量 λ 用任意正实函数 $Z(\lambda)$ 代替,則具有代替后網絡函数的網絡依然存在”,这只要考虑網絡的电感換成 $Z(\lambda) L$ 形式的阻抗,电容換成 $\frac{1}{Z(\lambda)C}$ 形式的阻抗,就能明白。由此知道,頻率變換不仅不是新的網絡函数,就是網絡构造也是从原来結構推导出来的。

首先,从基准的低通濾波器推导高通濾波器时,可利用變換

$$\lambda = \frac{\omega_0}{\lambda'} \quad \left(\omega = \frac{-\omega_0}{\omega'} \right) \quad (31.1)$$

把範圍 $0 < \omega < 1$ 變換到 $\omega_0 < \omega'$ 的範圍。在網絡构造上,則是 L 和 C 的變換。

对于帶通濾波器,利用

$$\lambda = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \cdot \frac{\lambda'^2 + \omega_0^2}{\lambda'} \quad \left[\omega = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \left(\frac{\omega'}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega'} \right) \right], \quad (31.2)$$

則變換到 $\omega_1 < \omega' < \omega_2$ 的範圍,其中 $\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$ 。在網絡构造上, L 變成串聯共振回路, C 變成并聯共振回路。

2) 損耗的影响及其补偿方法 L 或 C 具有損耗时,它們的阻抗通常變成 $\lambda L + r$, $1/(\lambda C + g)$ 的形式。假定網絡內全部元件的 r/L 和 g/C 的值都等于一定值 δ ,則有这种元件的網絡函数就是把沒有損耗时的函数內的 λ 換成 $\lambda + \delta$ 所得的函数。現在考虑在这种變換下傳輸特性如何变化。根据正則函数的性质,由于

$$\frac{d\gamma}{d\lambda} = \frac{d\gamma}{dj\omega} = -j \frac{da}{d\omega} + \frac{d\beta}{d\omega},$$

可写出

$$\Delta\alpha \doteq \delta \frac{d\beta}{d\omega}, \quad \Delta\beta \doteq -\delta \frac{d\alpha}{d\omega}. \quad (31.3)$$

即衰减特性(相位特性)的变化随相位特性(衰减特性)的急峻程度而增大。

此外,用这种变换时,网络函数的零点和极点向左侧移动 δ , 所以预先把设计好的函数零点和极点向右移动 δ , 再综合此函数的网络, 就可以纠正损耗的影响。可是传输系数的零点不能在右半平面, 所以也不能任意向右移动。由于移动衰减极点的影响比较小, 普通只对零点进行补偿。

3) 反对称滤波器的频率变换 对于 Tschébycheff 型反对称滤波器^①, 由 (30.7) 或 (30.24) 知道, $\lambda=0$ 时衰减不为零, 所以在两个终端电阻相等的情况下, 有一侧需要一个理想变压器。但如果对最低的衰减零点 $j\Omega_1$ 进行如下的变换:

$$\lambda'^2 = \frac{\lambda^2 + \Omega_1^2}{1 - \Omega_1^2}, \quad (31.4)$$

则截止频率几乎依旧如此, 但 Ω_1 变换到原点。对于联合 Tschébycheff 特性, 变换

$$\lambda'^2 = \frac{\lambda^2 + \Omega_1^2}{1 + \Omega_1^2 \lambda^2} \quad (31.5)$$

能将最高的衰减极点同时变换到无穷远点, 这是很方便的^②。

§ 32 延迟网络

在理想的延迟网络中, 对于输入信号 $f(t)$, 输出信号必须为 $f(t-t_0)$ 。因此, 对于 $e^{j\omega t}$, 输出为 $e^{j\omega(t-t_0)}$, 传输系数可表成

① 从 (25.31) 知道, 特性函数是偶数次的。

② 关于这种变换, 读者可参阅 W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 1954 年, 第二版第八章。以及陆志刚, 用工作参数理论设计滤波器, (一)(二), 电信科学, 1960 年, 4 期, 5、6 期。——译者注

$$S_s(j\omega) = e^{j\omega t_0} \quad [S_b(\lambda) = e^{\lambda t_0}], \quad (32.1)$$

即

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega t_0. \quad (32.2)$$

可是, 这个傳輸系数不是有理函数, 不能用有限多个元件集中参数的网络实现出来。用这个式子还不便求近似的有理函数, 通常变成下列形式比较方便^①:

$$\frac{S_b - 1}{S_b + 1} = \tanh \lambda t_0. \quad (32.3)$$

这是无限次的电抗函数, 因为可以展成下列一些式子:

$$\left. \begin{aligned} \tan \lambda t_0 &= \frac{\lambda t_0 \{(\lambda t_0)^2 + \pi^2\} \{(\lambda t_0)^2 + (2\pi)^2\} \dots}{\left\{(\lambda t_0)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\} \left\{(\lambda t_0)^2 + \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2\right\} \dots} \quad (a) \\ &= \frac{2\lambda t_0}{(\lambda t_0)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} + \frac{2\lambda t_0}{(\lambda t_0)^2 + \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2} + \dots \quad (b) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda t_0} + \frac{2\lambda t_0}{(\lambda t_0)^2 + \pi^2} + \dots} \quad (c) \\ &= \frac{1}{\left|\frac{1}{\lambda t_0}\right|} + \frac{1}{\left|\frac{3}{\lambda t_0}\right|} + \frac{1}{\left|\frac{5}{\lambda t_0}\right|} + \dots \quad (d) \end{aligned} \right\} \quad (32.4)$$

如果把它终止在有限次上, 则就作出了有理的电抗函数。反之, 由此可求出 S , 则在有限频率范围上得出逼近 $e^{\lambda t_0}$ 的有理函数。此时, 究竟利用以上哪一个展开式, 要视逼近的形式而异。例如, 对于(a), 在

$$\omega t_0 = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{2}, \quad \dots, \quad \frac{n\pi}{2}$$

的点上, β 与 ωt_0 一致, 对于(d), 则在 $\omega = 0$ 附近有最佳的逼近, 即

$$\beta/\omega = t_0 + c_n \omega^n + c_{n+1} \omega^{n+1} + \dots.$$

① $\tanh \lambda t_0$ 应改为 $\tanh \lambda \frac{t_0}{2}$. — 譯者注

以上簡單地考慮了傳輸係數 $e^{i\omega t}$ 的有理函數逼近, 關於延遲網絡的逼近理論, 嚴格的方法是規定它的群延遲時間。這就是喜安的展開方法, 現在單從方法上說明他的想法。

一般情況下, 在頻率 ω 下有相位延遲時間

$$t(\omega) = \beta/\omega, \quad (32.5)$$

關於能量的傳播時間, 則必須取群延遲時間

$$t(\omega) = d\beta/d\omega. \quad (32.6)$$

這裡定義一個複數群延遲時間

$$\tau(\lambda) = \frac{d\gamma}{d\lambda} = \frac{\partial\beta}{\partial\omega} - j \frac{\partial\alpha}{\partial\omega}. \quad (32.7)$$

它的實部表示群延遲時間, 虛部代表衰減量的變化, 我們希望它在全部頻率範圍上逼近一個實常數 t_0 。可是

$$\begin{aligned} \tau(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \log S_b(\lambda) = \frac{S'_b(\lambda)}{S_b(\lambda)} \\ &= \frac{1}{\lambda - \lambda'_1} + \frac{1}{\lambda - \lambda'_2} + \cdots - \frac{1}{\lambda - \lambda''_1} - \frac{1}{\lambda - \lambda''_2} - \cdots, \end{aligned} \quad (32.8)$$

其中 λ'_v 為零点, λ''_v 為极点。利用它可以進行 Wagner 逼近和 Tschebyscheff 逼近, 前者的解答與以上(d)的結果相同, 後者不幸不能解出一般的形式, 只能在次數較低的情況下求出計算式^①。

§ 33 時間域上的逼近理論

以上所述的全是網絡的頻率特性逼近理論。可是, 設計網絡時, 往往不限於給定頻率特性。在電視和脈沖通信等里面, 時間波形很重要。然而, 時間域特性經過 Fourier 變換就變成頻率域特

① 可參閱 E. Ulbrich und H. Piloty, Über den Entwurf von Allpässen, Tiefpässen und Bandpässen mit einer im Tschebyscheffschen Sinne Approximierten konstanter Gruppenlaufzeit, A. E. Ü. 14 (1960), 461~467, 以及 Th.-A. Abele, Übertragungsfaktoren mit Tschebyscheffscher Approximation konstanter Gruppenlaufzeit, A. E. Ü. 16 (1962), 9~18. ——譯者注

性,此时,頻率域上的最佳逼近,不一定是時間域上的最佳逼近,所以,也希望直接进行時間域上的逼近。这比頻率域上的逼近,一般要困难些。还因为考虑到网络的实现性,主要是頻率函数的方法,所以時間域的逼近也常要想到它的頻率函数的性质。这个问题有許多研究过,現在讲一点以正交函数的 Kautz 方法为中心的几件有趣的事。

傳輸函数是只在左半面有极点的有理函数,所以它的脉冲响应必須是下列形式的函数之和:

$$c_\nu e^{-\sigma_\nu t} \cos(\omega_\nu t + \theta_\nu), \quad \sigma_\nu > 0. \quad (33.1)$$

反之,对应于这种函数之和的傳輸函数也滿足实现条件。于是对这样的函数取一个正交函数集 $\{\phi_\nu(t)\}$, 即选取

$$\int_0^\infty \phi_\nu(t) \phi_\mu(t) dt = \begin{cases} 0 & (\nu \neq \mu) \\ 1 & (\nu = \mu) \end{cases} \\ (\nu, \mu = 1, 2, \dots), \quad (33.2)$$

对于給定的脉冲响应 $k(t)$, 若求

$$c_\nu = \int_0^\infty k(t) \phi_\nu(t) dt \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \quad (33.3)$$

則可得出近似的脉冲响应为

$$k_n(t) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \phi_\nu(t). \quad (33.4)$$

按照正交函数的性质,它是誤差

$$e_n^2 = \int_0^\infty \{k(t) - k_n(t)\}^2 dt \quad (33.5)$$

为最小的函数。

在所作的正交函数集內,可利用下列性质:

$$\int_0^\infty \phi_\nu(t) \phi_\mu(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\nu(\lambda) \Phi_\mu(-\lambda) d\lambda, \quad (33.6)$$

其中 $\Phi_\nu(\lambda)$ 是对应于 $\phi_\nu(t)$ 的傳輸函数。为了简单計,傳輸函数的极点全部限在負实軸上,且若选择

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\lambda) &= \sqrt{2\alpha_1} \frac{1}{\lambda + \alpha_1}, \\ \Phi_2(\lambda) &= \sqrt{2\alpha_2} \frac{\lambda - \alpha_1}{(\lambda + \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_n(\lambda) &= \sqrt{2\alpha_n} \frac{(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\cdots(\lambda - \alpha_{n-1})}{(\lambda + \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)\cdots(\lambda + \alpha_n)}, \end{aligned} \right\} \quad (33.7)$$

則 $\Phi_\nu(\lambda)\Phi_\mu(-\lambda)$ 形式的積 ($\nu \neq \mu$) 在左或右某个半平面內沒有极点, 由于它在无穷远点有二阶零点, 所以 (33.6) 等于零, 这就証明了它們的正交性。在复数根の場合, 可設

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{2\nu-1}(\lambda) \\ \Phi_{2\nu}(\lambda) \end{aligned} \right\} = \sqrt{2\alpha_\nu} \frac{(\lambda \pm |\lambda_\nu|) \prod_{i=1}^{\nu-1} \{(\lambda - \alpha_i)^2 + \beta_i^2\}}{\prod_{i=1}^{\nu} \{(\lambda + \alpha_i)^2 + \beta_i^2\}}. \quad (33.8)$$

其中复号的“+”对于 $\Phi_{2\nu-1}$ 而“-”对于 $\Phi_{2\nu}$ 而言, $\lambda_\nu = \alpha_\nu + j\beta_\nu$. 若取所得 $\{\Phi_\nu\}$ 的 Laplace 反变换, 则就得到了正交函数集 $\{\phi_\nu\}$.

可是, 决定这种函数是根据极点的选择方法, 逼近的好坏有很大的出入, 所以需要对給定的函数选择适当的极点。方法之一为在 $\lambda=0$ 附近把給定的 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(\lambda)$ 展开成連分式

$$F(\lambda) = \frac{b_0}{1} + \frac{b_1\lambda}{1} + \frac{b_2\lambda}{1} + \dots, \quad (33.9)$$

并且切取它的有限多項, 得出逼近有理函数的极点。

此外, 作为一个特殊情况, 可以考慮 $\lambda = -\alpha$ 处的多重极点, 作出一系列函数

$$\Phi_\nu(\lambda) = \sqrt{2\alpha} \frac{(\lambda - \alpha)^{\nu-1}}{(\lambda + \alpha)^\nu}. \quad (33.10)$$

与此相当的 $\phi_\nu(t)$ 即是

$$\phi_\nu(t) = \sqrt{2\alpha} (-1)^{\nu-1} e^{-\alpha t} L_{\nu-1}(2\alpha t), \quad (33.11)$$

其中 L_ν 是 Laguerre 多項式。

关于求逼近有理函数的方法, 除这里所述的正交函数方法之

外,还有很多。一种方法也是切取 (33.9) 連分式的有限多項,設为

$$H^+(\lambda) = \frac{a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n}{b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_m\lambda^m} \quad (n \geq m), \quad (33.12)$$

把它和 $H(\lambda)$ 的展开式

$$H(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots \quad (33.13)$$

相比較,利用下列的系数間关系式:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0, \\ a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (33.14)$$

就可求出未定系数 $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$, 但为了利用这种方法,必須首先求出 (33.13) 那样的展开式,为此如果把图 33.1 (a) 的脉冲响应近似地表示成图 (b) 的脉冲序列,

$$h(t) \doteq \sum_{\nu=0}^{\infty} h_{\nu} \delta(t - \nu \Delta t), \quad (33.15)$$

則得

$$H(\lambda) \doteq \sum_{\nu} h_{\nu} e^{-\nu(\Delta t)\lambda}, \quad (33.16)$$

再利用展开式

$$e^{-\nu(\Delta t)\lambda} = \sum_{\mu} \frac{1}{\mu!} \{-\nu(\Delta t)\lambda\}^{\mu} \quad (33.17)$$

就可求出它来。

在近似地表示時間函数时,除了脉冲序列以外,还可以利用图 33.1 (c) 和 (d) 那样的阶跃函数、折綫或二次曲綫等进一步近似。在这些情况下,例如在脉冲序列情况下,也不一定需要等間隔,可以按照波形,某些地方分得細一点,某些地方間隔大一些。若把

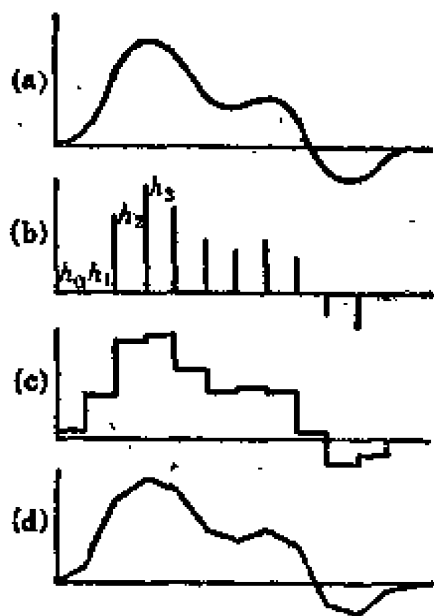


图 33.1

这些近似曲綫进行若干回微分,則可得出一个脉冲序列。例如在折綫的情况下,可写出

$$\frac{d^2}{dt^2} h(t) \doteq \sum_{\nu} h_{\nu}'' \cdot \delta(t - t_{\nu}), \quad (33.18)$$

由此得到

$$H(\lambda) \doteq \frac{1}{\lambda^2} \sum h_{\nu}'' e^{-t_{\nu}\lambda}. \quad (33.19)$$

用它代替(33.16)就可以了。

以上,讲述了給定脉冲响应时的逼近方法,还有在指定的輸入波形 $i(t)$ 和指定的輸出波形 $v(t)$ 的情况下求网络。此时, $i(t)$ 和 $v(t)$ 都表成脉冲序列,把 $I(\lambda)$ 和 $V(\lambda)$ 用 $e^{-\lambda t}$ 的幂級数展开,只取多項式,然后就能求出 $V(\lambda)/I(\lambda)$ 。

第7章 特殊网络

本章內,我們要簡單地讲述 RC 网络、分布参数网络和非互易网络。 RC 网络是一种普通的集中参数网络,但它有新的理論,由于内容编排上的緣故,現在亦放在这里。

§ 34 RC 网络

在电抗滤波器的情况下,它的元件总有某种程度的損耗,如果設計得不恰当,則很容易使通帶內的衰减稍稍增大,截止特性的急峻程度变坏。所以就出現了在元件的損耗非常大时,甚至沒有电感只有 R 和 C 时,特性如何变化的問題。关于这一点,1949 年 Guillemin 証明,除了有一定的衰减外,可以作出一个不平衡型的 RC 网络,它的特性能够不論多少地逼近任意的衰减特性,不久,許多人注意了這個問題,这个理論也有了很大的进展。 RC 网络的特点是适用于极低頻率,它和需要大电感的 LC 网络比較起来,不仅經濟并且正确,比較容易实现。缺点当然是衰减大,但在放大技术很进步的今天,这算不得是个問題。另一缺点是,要得到急剧变化的特性,元件需要得相当多。

利用和放大器組合的 RC 网络的特点时,在它的結構上,再加下面两个限制比較妥当:

- (i) 不含理想变压器的純 RC 网络。
- (ii) 不平衡的四端网络(即有一根公共归綫)。

但不幸,这种形式实现的必要和充分条件还不知道。只是尾崎給出了一两个充分条件。

不問它的构造如何,用导納参数表出时, RC 网络必須滿足的

条件是:

$$Y_{ij} = a_{ij}^{(\infty)}\lambda + a_{ij}^{(0)} + \sum_{\nu=1}^n \frac{a_{ij}^{(\nu)}\lambda}{\lambda + c_\nu} \quad (i, j=1, 2), \quad (34.1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{(\nu)} \geq 0, \quad a_{11}^{(\nu)}a_{22}^{(\nu)} - a_{12}^{(\nu)^2} \geq 0 \quad (\nu=0, 1, \dots, n, \infty), \\ c_\nu > 0 \quad (\nu=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (34.2)$$

如果准许使用理想变压器, 则和 LC 网络有同样的综合方法, 这个条件就是充分条件。但有上述的限制, 问题就难了。尾崎的一个充分条件是:

(i) $Y_{11} = Y_{22}$, 亦就是一个对称四端网络,

(ii) 写成 $Y_{12} = \frac{-G_{12}(\lambda)}{F(\lambda)}$ 时, G_{12} 除正常数外, 是一个在右半平面没有零点的正系数多项式。(亦就是一个最小相移网络。)

下面简单地讲述这个综合方法。首先假定留数的行列式不等于零, 从 Y_{11} 和 Y_{22} , 适当地分出导纳, 使成为零。其次在不破坏上述条件的范围上, 就分出了一个矩阵

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_2 \end{pmatrix}.$$

对于阻抗参数, 可以同样进行以上的步骤。如果这些步骤都不可能, 那末还是能够在满足上述的条件范围上, 适当地把 Y 矩阵进行和式分解, 使每一个在形式上都变得简单。此时 Y_{12} 分子多项式的零点要和极点相一致, 或者最高次项的系数为零。如果依下法进行, 这总是可能的。亦就是 Y_{12} 的零点不管是不是在虚轴上或是左平面内, 都可以分解到负实轴上, 因为

$$\begin{aligned} G_{12} &= (\lambda^2 + a^2)g_{12} = \lambda^2 g_{12} + a^2 g_{12}, \\ \{(\lambda + a)^2 + b^2\}g_{12} &= (\lambda + c_s)(\lambda + d)g_{12} + x_0 g_{12}, \\ (\lambda + a)g_{12} &= x_s(\lambda + c_s)g_{12} + x_{s+1}(\lambda + c_{s+1})g_{12}, \\ & \quad (c_s < a < c_{s+1}). \end{aligned}$$

尾崎又把条件作如下的推广。综合的方法也大致相同。

(i) $(Y_{11} - Y_{12}) : (Y_{22} - Y_{12}) = n : 1, n > 0$.

(ii) 和以上的条件(ii)相同。

可是, RC 网络的特性往往用电压传输系数或电流传输系数的形式来规定。这可使问题简化, 并且还有一个理由是在和放大器组合时, 电子管的阳极侧近似于定电流源, 而对于阴极跟随器, 近似于定电压源。

现设电压传输系数由下式给出:

$$N \left(= \frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + Y_{22}}{-Y_{12}} \right) = \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)}, \quad (34.3)$$

其中, RC 网络的条件要求 q 的零点限在负实轴上, 又为了满足尾崎的条件, p 的零点不在右半平面内。要实现这个 N 的充分条件简单地还表不出来, 但在实际问题中, 由于与频率无关的一定的衰减可以用放大器来补偿, 利用这一点, N 还是能实现的, 亦就是去实现乘以常数后的 hN 。当然, h 愈小, 少用几个放大器就能做到, 所以结果的问题是在实现可能的范围上怎样选择才能尽量使 h 减

小。

首先, 由 N 求出导纳参数, 把 q 分解为

$$q = q_1 + q_2, \quad (34.4)$$

q_1 和 q_2 都在负实轴上有单根, 且彼此隔离。由图 34.1 看出, 这总是可能的。

如果 q_2 具有更接近于原点的零点, 则由于

$$hN = \frac{1 + q_2/q_1}{p/hq_1}, \quad (34.5)$$

于是

$$Y_{22} = q_2/q_1, \quad Y_{12} = p/hq_1. \quad (34.6)$$

这就决定了满足以前关于留数实现条件的 h 。

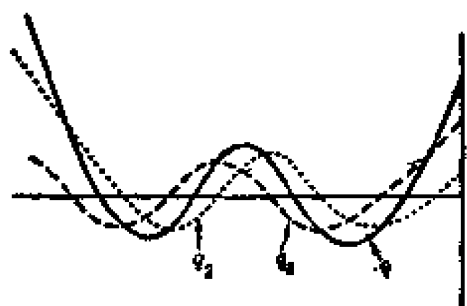


图 34.1

Guillemin 利用以上所得的 Y_{22} 和 Y_{12} 作为求网络的方法, 给出了梯子形网络的并联构造。亦就是和二端网络综合理论中的宫田方法一样, 把 Y_{22} 展成梯子形, 如图 34.2 那样, 经过适当的节数再按倒量展开, 这种网络的 Y_{12} 是下列的形式:

$$k_v \lambda^v / q_1,$$

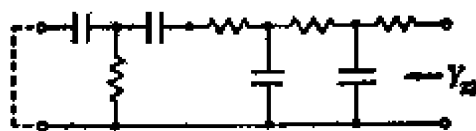


图 34.2

把这些适当地组合起来, 就可得出 p/hq_1 . 这时的 h 由于没有求出网络所以算不出来, 对于 p 的条件也比尾崎的条件要弱, 但只有正系数的多项式才行。

以上方法的缺点是 q 的分解不是唯一的, 最佳的分解还不知道。

但这是就 N 的实现条件和实现方法而言, 至于有关特性的逼近方法, 还应指出, RC 网络的重大限制是 N 的零点都限在负实轴上 (无穷远点除外), 因此与 LC 情况相比较要困难一些。即使采用第 6 章的 Fourier 级数方法的 (ii), 或是采用位论等有力的方法, 也不能得出完全的 Tschebyscheff 特性的公式。此外, 也可以适当地求出

$$\left\{ \frac{1}{\lambda + c_v} \right\}$$

那样的函数集, 并按此来考虑逼近的方法^①。

§ 35 分布参数网络

这里不准备讲分布参数网络的一般理论。只是简单地叙述元件和构造上有以下限制的且处理起来类似于集中参数网络理论的理论体系。这些限制是下面三个条件:

① 例如参阅尾崎弘, 藤泽俊男, RC 网络的近似问题, 电气通信学会杂志, 36 (1953), 156~158, ——译者注

- (i) 元件是不含损耗的;
- (ii) 元件的电长度全部相等;
- (iii) 没有串联的构造。

条件 (i) 和集中参数情况下对于电抗网络的限制是相同的。条件

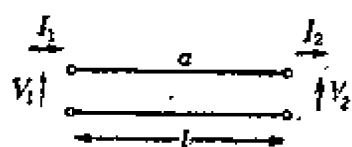


图 35.1

(ii) 是使网络函数成为简单的形式, 设长度为 l , 现对图 35.1 那样的波动导纳为 a 的元件列出传输线方程, 亦就是在 (17.5) 内代入 $Z_{01} = Z_{02} = a^{-1}$, $\gamma = j\beta$, 可得

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= V_2 \cos \beta l + j I_2 / a \cdot \sin \beta l, \\ I_1 &= j V_2 a \sin \beta l + I_2 \cos \beta l, \end{aligned} \right\} \quad \left(\beta = \frac{2\pi f}{c} \right). \quad (35.1)$$

然而对于这个长为 $1/4$ 波长的频率, 即 $f_0 = c/4l$, 由于 $\beta l = \pi/2$, 所以由这些元件构成的网络特性是以 $(-f_0, f_0)$ 为基本周期的周期函数。利用变换

$$\lambda = j \tan \beta l = j \tan (\pi f / 2 f_0), \quad (35.2)$$

可把 $(-f_0, f_0)$ 的区间变换到 $(-j\infty, j\infty)$ 范围上。于是 (35.1) 的右边各系数即级联矩阵成为

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda/a \\ a\lambda & 1 \end{pmatrix}. \quad (35.3)$$

因此, 元件一端短路和开路时, 输入导纳各为

$$Y_{11} = \frac{a}{\lambda}, \quad Y_{10} = a\lambda, \quad (35.4)$$

这和集中参数情况下的电感和电容在形式上是相同的。由于存在了与电抗网络的两个基本元件相当的元件, 所以如果不限限制联接形式, 则不含互感的集中参数网络的各个元件都可以换成分布参数的元件。但在分布参数网络内, 很难进行串联, 因为平行线情况有不平衡的辐射问题, 同轴线情况必须采用二重同轴。因此, 复杂网络的串联实际上是不大可能的。由于这个理由, 加入了第三个

限制,于是简化了网络构造。在集中参数场合中,不能考虑这种限制,但在分布参数场合中,元件本身就是四端网络,它们的级联能够给出新的可能性。



图 35.2

在图 35.2 内,若在波动导纳为 a 的元件上联接一个导纳 Y_2 ,则输入导纳是

$$Y_1(\lambda) = a \frac{Y_2(\lambda) + \lambda a}{a + \lambda Y_2(\lambda)}, \quad (35.5)$$

这里 $Y_1(1) = a$. 由此得出

$$Y_2(\lambda) = Y_1(1) \frac{Y_1(\lambda) - \lambda Y_1(1)}{Y_1(1) - \lambda Y_1(\lambda)}. \quad (35.6)$$

按照 Richards 定理,如果 $Y_1(\lambda)$ 是正实函数,则 $Y_2(\lambda)$ 也是正实函数。从而得出下列定理:

定理 任意二端导纳 $Y_1(\lambda)$ 总可以实现成波动导纳为 $Y_1(1)$ 的元件和 (35.6) 导纳的级联形式。

$Y_1(1) + Y_1(-1) = 0$ 时, $Y_2(\lambda)$ 的次数比 $Y_1(\lambda)$ 的次数低一次。特别在电抗二端网络的情况下,由于 $Y_1(\lambda)$ 是奇函数,通常这个关系是成立的,取出级联元件就使次数降低,结果有下列的系。

系 电抗二端网络可以用数目等于它的次数的元件之级联实现出来。

在 (35.6) 内,有趣的是 $Y_1(\infty) = \infty$ 时 $Y_2(\infty) = 0$, $Y_1(\infty) = 0$ 时 $Y_2(\infty) = \infty$. 利用这种性质,对于图 35.3 所示的二端网络(为了方便,二端元件仍采用集中参数相同的记号,下面也是这样),首先把 $\lambda = \infty$ 的极点作为并联的电容分出,其次取出级联的元件,由于 $\lambda = \infty$ 又成为极点,所以下面可以反复这两个操作,结果实现成图 35.4 所示的没有串联的网络。

为了把这种方法推广到一般的二端网络,我们再讲下面两种重要的变换。



图 35.3

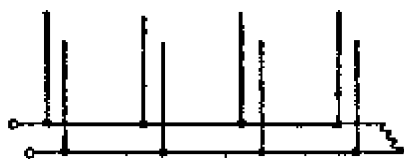


图 35.4

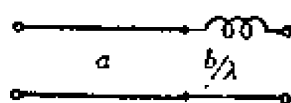


图 35.5

(i) 图 35.5 的四端网络等效于图 35.6 的四端网络, 它们之间的变换公式如下:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{a^2}{a+b}, & d &= \frac{ab}{a+b}; \\ a &= c+d, & b &= d^2 \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right). \end{aligned} \right\} \quad (35.7)$$

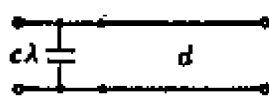


图 35.6

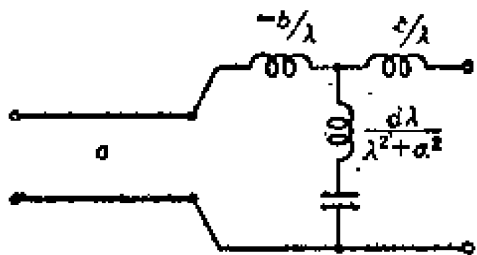


图 35.7

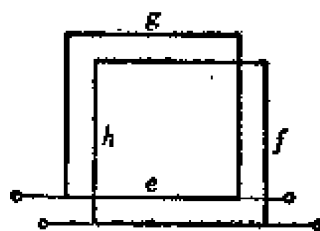


图 35.8

(ii) 在图 35.7 那样的 Brune 网络的负电感侧联接一个锁联元件, 如果

$$\left. \begin{aligned} b &= c+d \text{ (全耦合条件)}, \\ a &\leq b, \end{aligned} \right\} \quad (35.8)$$

则它能变换成如图 35.8 所示的由四个元件联成的环状网络(它叫作单位环路)。它们的变换公式如下:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{abc(1+\omega_0^2)}{p}, & f &= \frac{cd(b-a)}{p}, \\ g &= \frac{bd(b+a\omega_0^2)}{\omega_0^2 p}, & h &= \frac{ad(b+a\omega_0^2)}{p}, \end{aligned} \right\} \quad (35.9)$$

其中

$$p = b^2 + \omega_0^2(ad + bc).$$

这对于虚轴上的衰减极点是这样, 对于实轴上的衰减极点, 只要在上式中令

$$b \rightarrow -b, \quad d \rightarrow -d, \quad \omega_0^2 \rightarrow -\sigma_0^2,$$

且有条件

$$\sigma_0^2 \geq 1,$$

则仍然变换成正元件的单位环路。

利用这种变换,就证明了下列重要的定理。

定理 为要导纳 $Y(\lambda)$ 能实现成除单位环路外没有其他闭回路的电抗四端网络终接一个电阻的形式,其必要和充分条件是 $Y(\lambda) + Y(-\lambda)$ 的零点只在实轴的 $|\lambda| \geq 1$ 内或在原点除外的虚轴上。

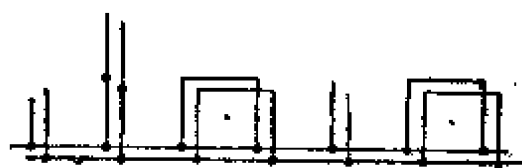


图 35.9

除单位环路外没有其他闭回路的电抗四端网络的形式如图 35.9 所示,它相当于集中参数情况下的梯子型。

这个定理的必要性是很容易明白的,这里只说明它的充分性。

$Y(\lambda)$ 在虚轴上有极点时,可把它作为并联电抗分离出来。这个操作并不改变 $2G(\lambda) \equiv Y(\lambda) + Y(-\lambda)$ 。

$G(\lambda)$ 在实轴上有零点时,可以分出图 35.7 那样的 Brune 网络和锁联的元件(顺序上无论哪个在先都可以)。这就能用上述的变换实现成单位环路,剩下部分的 $G(\lambda)$ 的零点,除分出部分的零点以外,是和原来的相同。

若设虚轴上的零点为 $j\omega_1, j\omega_2, \dots$, 由于 $Y(j\omega_r)$ 是纯虚数,故

$$Y(1) - j\omega_r Y(j\omega_r) \quad (35.10)$$

是实数。这个值假定为负,且设零点为 $j\omega_1$ 。由 $Y(\lambda)$ 取出锁联元件 $Y(1)$, 接着取出对于 $j\omega_1$ 的 Brune 网络。这部分就是图 35.7 的网络,由于 a 等于 $Y(1)$, 且

$$a - b = \frac{Y(1)^2(1 + \omega_1^2)}{Y(1) - j\omega_1 Y(j\omega_1)} < 0,$$

所以仍能用单位环路实现出来。实际计算时,先取出 Brune 网络,

也没有区别。对于某个 $j\omega_v$, 当 (35.10) 的值为正时, 首先取出鎖联元件 $Y(1)$, 剩下的設为 $Y_1(\lambda)$,

$$j\omega_v Y_1(j\omega_v) - j\omega_v Y(j\omega_v) = \frac{\omega_v^2 \{Y(1)^2 - Y(j\omega_v)^2\}}{Y(1) - j\omega_v Y(j\omega_v)} > 0.$$

亦就是 $j\omega_v Y(j\omega_v)$ 的值增大时, 由于 $Y(1)$ 不收敛于零 (参考下面), 所以上式右边也不收敛于零。又 $Y(1)$ 不能为无穷大, 所以经过有限多回, (35.10) 必能成为負值。从而又能用以上的方法除去 $G(\lambda)$ 的零点。在 $\omega_v = \infty$ 的特別情况下, 則和图 35.6 一样, 能够很简单地除去, 当 (35.10) 为零时, 由于 Brune 网络內沒有理想变压器, 就可以不用单位环路来实现。最后, 若 $G(\lambda)$ 变成实常数, 这能用电阻和电抗的并联实现出来, 于是綜合宣告結束。

[$Y(1)$ 不趋于零或 ∞ 的証明] 取出 n 回鎖联元件时的导納設为 $Y_n(\lambda)$, 現在假定 $Y_n(1) \rightarrow 0$, 則存在 n_0 和 α , 使得

$$Y_n(1) < \alpha < Y(0) = Y_n(0) \quad (n > n_0),$$

从而存在 σ , 使

$$Y_{n_0}(\sigma) = \alpha \quad (0 < \sigma < 1).$$

但由于

$$Y_{n_0+1}(\sigma) - Y_{n_0}(\sigma) = \frac{Y_{n_0}(\sigma)^2 - Y_{n_0}(1)^2}{Y_{n_0}(1)/\sigma - Y_{n_0}(\sigma)} > 0,$$

重复这样做, 一般有

$$Y_n(\sigma) > Y_{n_0}(\sigma) \quad (n > n_0),$$

另一方面, 从正实函数的性质,

$$\frac{Y(1)}{\lambda} \geq Y(\lambda) \quad (0 < \lambda \leq 1).$$

因此

$$Y_n(1) \geq \sigma Y_n(\sigma) \geq \sigma Y_{n_0}(\sigma) \quad (n > n_0).$$

但这和 $Y_n(1) \rightarrow 0$ 是矛盾的。同样能够証明 $Y_n(1)$ 不能趋于 ∞ 。

这样就証明了这个定理。由于滤波器的特性可只由它的輸入导納决定出来, 所以沒有相位特性問題的、衰减极点只在实軸上 $|\lambda| \geq 1$ 范圍或除原点外虛軸上的滤波器, 总可以利用除单位环路

外没有其他閉回路的电抗四端网络构成。又在原点也有一阶衰减极点时,則用并联的电感就能实现。

如此得出的四端网络的传输系数是

$$S_b(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{(\sqrt{1-\lambda^2})^l f(\lambda)}, \quad (35.11)$$

其中 $g(\lambda)$ 是 Hurwitz 多项式, $f(\lambda)$ 是偶或奇的多项式。 l 等于由輸入至輸出之間最短途徑的鎖联元件数。

$$S_b(\lambda) S_b(-\lambda) = \frac{g(\lambda) g(-\lambda)}{(1-\lambda^2)^l f(\lambda) f(-\lambda)}, \quad (35.12)$$

当 $g(\lambda)$ 内有 $(1+\lambda)^l$ 因子时,分子和分母可以簡約,这和集中参数的情况有相同的形式。因此,可以完全同样地进行逼近。此时可写出

$$S_b(\lambda) = \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^{l/2} S_{b1}(\lambda) = e^{j \frac{\pi l}{2f_0} f} \cdot S_{b1}(\lambda), \quad (35.13)$$

这个 $S_{b1}(\lambda)$ 就是集中参数场合的传输系数, $\exp(j\pi f l / 2f_0)$ 简单地只是一个延迟。亦即在这种情况下,只是为了延迟,多了 l 个元件。

其次, $f(\lambda) \equiv 1$ 时网络成为图 35.4 的形式,特别是,当 $g(\lambda)$ 的次数等于 l 时,变成只有鎖联元件的网络。这时的特性正好等于逼近論內所述的 Fourier 級数的特性。

一般情况下特性的逼近方法,有各种各样的考虑,这里就省略了。

§ 36 非互易网络

在由电阻、电感、电容、理想变压器组成的网络内,互易定理总是成立的,可是互易性和綫性无源是独立的,綫性无源的网络也可能是非互易的。这在有回轉的力学系統中早已知道,在电系統中証明存在,还是近二十年內的事。下面将从一般的观点討論它的原理。

通常在物理量之中,电压 V 和电荷 Q , 电流 I 和磁通 Φ 等两者之积表示能量。现在假设有一个量作微小变化, 此时一个系统供给的能量可表成一个量乘另一量的增量 VdQ , $Id\Phi$ 等形式。由此就把 V 和 I 的量及 Q 和 Φ 的量分成两类。现在考虑一个系统是用 x_1, y_1 和 x_2, y_2 两对量来规定, 能量的增量为

$$dU = y_1 dx_1 + y_2 dx_2, \quad (36.1)$$

再设下列关系成立:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \right\} \quad (36.2)$$

由于

$$a_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} = a_{21},$$

所以以上的关系看成是互易的。可是若把它写成

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}y_2, \\ x_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}y_2, \end{aligned} \right\} \quad (36.3)$$

则由于 $b_{12} = a_{12}/a_{22} = -b_{21}$, 所以这个关系不是互易的。在非互易之中, 我们特别把 $b_{12} = -b_{21}$ 的情况叫作反互易的。由上述可知, 互易或反互易是由变量的取法而来, 不是系统本身的性质。在电网路的场合, 输入和输出都由电压和电流规定出来, 但对于一对端于是静电的, 另一对端子是电磁的系统, 亦就是设

$$dU = V_1 dQ_1 + I_2 d\Phi_2, \quad (36.4)$$

$I_1 = dQ_1/dt$, $V_2 = d\Phi_2/dt$, 由于 V_1 和 I_2 , I_1 和 V_2 各为相同系统的量, 于是写成

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2, \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \right\} \quad (36.5)$$

时, 就有 $Z_{12} = -Z_{21}$, 这成为反互易的网络。实际上, 实现(36.4)的东西就是把静电型的机电变换器(例如电容式微音器)和电磁型的机电变换器(例如活动线圈话筒)在机械端子处锁联后所成

的系统。

此外,作为非互易网络元件的,亦有考虑利用 Hall 效应做成的器件。在图 36.1 内,锗半导体立方体的两对面上各联以电极,今在一对面上加入垂直的磁场,那末这两对端子间的特性就是非互易的。

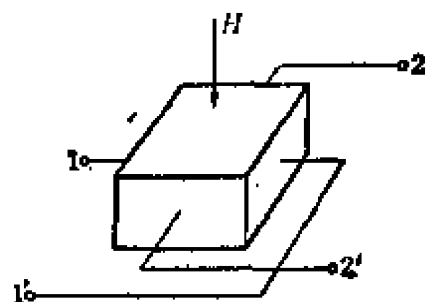


图 36.1

虽然知道在无源元件中亦存在非互易的无源元件,但在非互易网络理论中,正如把耦合线圈理想化后定义出理想变压器一样,把非互易的性质理想化,考虑

理想回转器是方便的。它定义为具有下列阻抗矩阵的东西:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix} \quad (\zeta \text{ 为实数}), \quad (36.6)$$

它的记号如图 36.2 所示。

由 (36.6) 可求出链联矩阵为

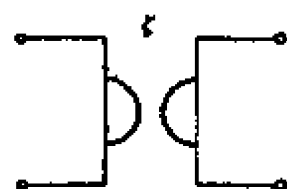


图 36.2

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ 1/\zeta & 0 \end{pmatrix}, \quad |K| = -1. \quad (36.7)$$

把它和理想变压器的链联矩阵

$$K = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix}, \quad |K| = 1 \quad (36.8)$$

对比一下,是很有趣的。

非互易网络的一般理论将在第二篇内叙述,这里简单地提一下几个有趣的网络。

(i) 阻抗反转网络 理想回转器把电流变换成电压,电压变换成电流,所以输出端联接一个阻抗 Z 时,输入阻抗就变成 ζ^2/Z 。

(ii) 单向通过系统 在图 36.4 中, ζ 和电阻串联,它的阻抗矩阵变成

$$\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 2\zeta & \zeta \end{pmatrix}, \quad (36.9)$$

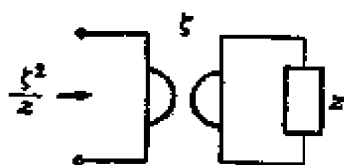


图 36.3

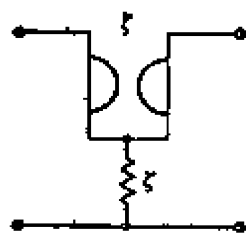


图 36.4

由于 $Z_{12}=0$, $Z_{21} \neq 0$, 所以只能自左向右传输信号, 反方向不能传输。

(iii) 环行器 (circulator) 若按图 36.5 联接, 则在各终端阻抗为 ζ 时, 得出只能由 $11'$ 至 $22'$ 、由 $22'$ 至 $33'$ 、由 $33'$ 至 $11'$ 传输的网络。因此称它为环行器。

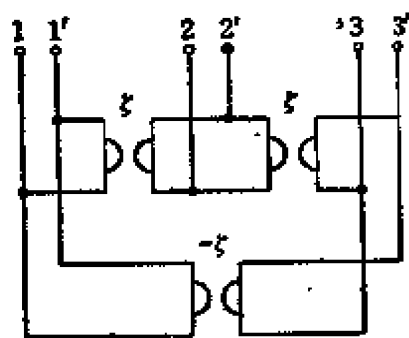


图 36.5

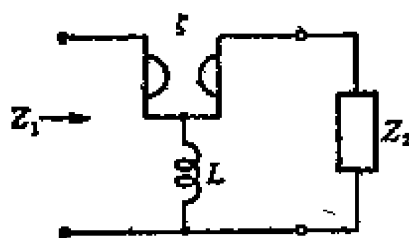


图 36.6

(iv) 在二端网络综合理论上的应用 作出图 36.6 那样的网络, 则

$$Z_1 = \frac{\lambda LZ_2 + \zeta^2}{\lambda L + Z_2}, \quad (36.10)$$

它正好和 § 13 (b) 所述的 Z_5 和 Z_6 的关系相同, 所以仍旧得出 Brune 的第 4 步。当 $L_1 < 0$ 时, L 可代成 C 。

第二篇 多端网络理论^①

第8章 基础理论

§ 37 总 论

在上一篇中,讲述了二端网络和四端网络的许多有趣的性质,这一篇将进一步研究 $2n$ 端网络。这不仅因为对 $2n$ 端网络有兴趣,同时,亦为了在了解 $2n$ 端网络以后,才能充分理解二端网络和四端网络。不仅如此,在二端网络和四端网络问题中,还有综合网络所需的元件数目问题和等效网络等问题,这些问题,如果不从 $2n$ 端网络的观点来讨论,将得不到解决。多端网络理论也有很多分门,下面主要讲述应用数学特性最强的综合理论(或构成理论),即考虑如何实现具有给定频率特性的多端网络问题。所处理的是时间上不变的、线性、无源、集中参数元件的网络。

$2n$ 端网络是如图 37.1(a)所示的有 n 对外部端子的网络,亦就是在 n 端对网络 (n -terminal pair network, n -port) 上,只在这些端对上加入外部的电动势。因此,并不是指仅由端子构成 $2n$ 个回路。例如,对于外部端子为 3 或 4 的网络,如果全部考虑它们的端子组合,则各可成为 6 端或 12 端网络。在各端对的电压和电流,具有如下的关系:

$$V = ZI_n \quad (37.1)$$

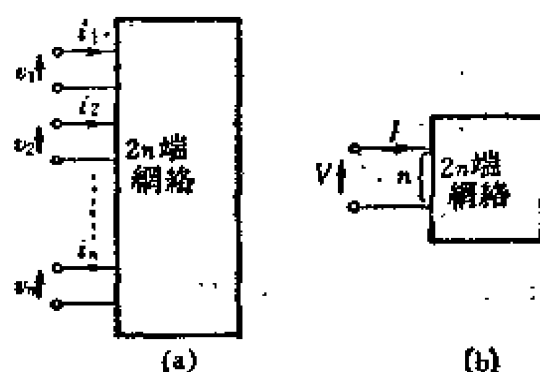


图 37.1

① 第二篇由大野执笔。

其中

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_{11} \cdots z_{1n} \\ \cdots \cdots \cdots \\ z_{n1} \cdots z_{nn} \end{pmatrix}. \quad (37.2)$$

根据(37.1)式,在以后,图37.1(a)将屡次地画成图(b)那样。这些式子中,通常用小写字母代表标量,大写字母代表矩阵。解出(37.1)内的 I ,则得

$$I = YV, \quad (37.3)$$

其中 $Y = Z^{-1}$, Z 和 Y 各为 $2n$ 端网络的阻抗矩阵和导纳矩阵。但在四端网络场合中已经看到,还存在不能定义 Z 和 Y 的 $2n$ 端网络。两个以上 $2n$ 端网络的串联或并联,也得出 Z 或 Y 的和,具体联接时,一般还需要理想变压器,这和四端网络的情况是相同的。对于不含回转器等非互易元件的互易网络,即由电阻(R)、电容器(C)、线圈(L)和理想变压器(变压器 M 可看成 L 与理想变压器的组合)组成的通常网络, Z 和 Y 是对称矩阵。下面若无特殊声明,网络都设为互易的。

描述多端网络特性的矩阵中,除 Z 矩阵和 Y 矩阵外, S 矩阵也是重要的。考虑到一般对它不很熟悉,所以我们将要比较详细地加以叙述。如果在图37.1的各端对上,联接一段波动阻抗为1的无限短的线路,则 $2n$ 端网络各端子对上的入射电压波和电流波各为 $\frac{1}{2}(v_1 + i_1)$, \dots , $\frac{1}{2}(v_n + i_n)$ 。反射波为 $\frac{1}{2}(v_1 - i_1)$, \dots , $\frac{1}{2}(v_n - i_n)$ 。

这是因为可以假定有一段波动阻抗为 z_0 ,传输常数为 γ 的线路,我们知道,若输入端的电压和电流各为 v_1 和 i_1 ,则与输入端相距 x 处的电压等于

$$\begin{aligned} & v_1 \cosh \gamma x - i_1 z_0^{-1} \sinh \gamma x \\ &= \frac{1}{2} (v_1 + i_1 z_0^{-1}) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} (v_1 - i_1 z_0^{-1}) e^{\gamma x}. \end{aligned}$$

右边第一項表示远离輸入端的波，第二項表示接近輸入端的波。若令 $z_0 = 1$ 和 $x \rightarrow 0$ ，則入射电压波和反射电压波各为 $\frac{1}{2}(v_1 + i_1)$ 和 $\frac{1}{2}(v_1 - i_1)$ ，同样，对于电流，也有类似的关系。

这里利用入射波和反射波的关系定义一个矩陣 S ：

$$S(V + I) = V - I, \quad (37.4)$$

S 矩陣 (scattering matrix) 也叫特性矩陣。具体的 S 例如可用下法計算。在图 37.2 內，在各端对上联接 n 个单位內阻的电源

$$E' = (e_1, \dots, e_n) \quad (37.5)$$

(撇号表示轉置矩陣)。考虑到內阻引起的电压降，所以

$$\left. \begin{aligned} E &= V + I, \\ I &= \eta E, \end{aligned} \right\} \quad (37.6)$$

其中 η 是把电源內阻附加在 $2n$ 端网络上所得的 $2n$ 端网络 (见图)

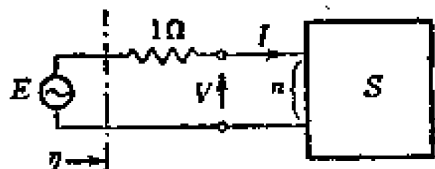


图 37.2

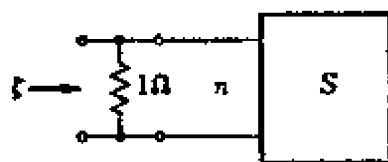


图 37.3

的导納矩陣。所以 η 的各个元素不会变成无穷大，就是說， η 总是存在的。由 (37.4) 和 (37.6) 直接得出

$$S = 1_n - 2\eta, \quad (37.7)$$

其中 1_n 是 n 阶的单位矩陣。因此， S 矩陣經常存在，即使对于不存在 Z 矩陣或 Y 矩陣的 $2n$ 端网络，也可把它定义出来。同样，令图 37.3 网络的阻抗矩陣为 ζ ，則

$$S = 2\zeta - 1_n. \quad (37.8)$$

当 $2n$ 端网络具有 Z 矩陣或 Y 矩陣时，下列一些关系可以帮助研究 S 矩陣的性质：

$$\left. \begin{aligned} S &= 1_n - 2(Z + 1_n)^{-1} = (Z - 1_n)(Z + 1_n)^{-1}, \\ S &= 2(1_n + Y)^{-1} - 1_n = (1_n - Y)(1_n + Y)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (37.9)$$

$$\left. \begin{aligned} Z &= \eta^{-1} - 1_n = (1_n + S)(1_n - S)^{-1}, \\ Y &= \zeta^{-1} - 1_n = (1_n - S)(1_n + S)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (37.10)$$

在 $2n$ 端网络内, 消耗的功率不能为负, 且由于

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(V'^* I) &= \frac{1}{4} (V'^* + I'^*) (V + I) - \frac{1}{4} (V'^* - I'^*) (V - I) \\ &= \frac{1}{4} (V'^* + I'^*) (1_n - S'^* S) (V + I) \\ &= \frac{1}{4} E'^* (1_n - S^* S) E, \end{aligned} \quad (37.11)$$

其中 $*$ 表示复共轭, Re 表示实部, 所以若任意假定电源电压 E , 则 $1_n - S^* S$ 是一个非负值的 Hermite 矩阵。

具有 $H^* = H$ 性质的矩阵 H 叫做 Hermite 矩阵。当

$$X' = (x_1, \dots, x_n)$$

时, $X'^* H X$ 叫作 Hermite 形式, 如果不管 X 如何, 它是非负的, 则 H 称为非负值的 Hermite 矩阵。 H 的元素为实数时, 简单地也可称为非负值矩阵。关于非负值矩阵的性质, 可参考 § 40 有关正实矩阵的一些定理。

其次注意 S 左上角的 k 阶子矩阵, 就是把第 $k+1, \dots, n$ 端对都終接单位电阻后所得的 $2k$ 端网络的 S 矩阵。这在 (37.4) 内令

$$v_{k+1} + i_{k+1} = 0, \dots, v_n + i_n = 0,$$

再从 S 矩阵的定义就可明白。由此可知, S 矩阵在电阻終端网络的研究上特别适用。

以上虽然考虑了波动阻抗为 1 的无限短的綫路, 但若把按照 (37.4) 定义的 S 矩阵作为正规化的 S 矩阵, 则各端对上为波动阻抗 z_{01}, \dots, z_{0n} 的綫路之 S 矩阵也可定义出来。这在图 37.4 那样的終端阻抗各为 z_{01}, \dots, z_{0n} 的情况下是有用的。但此时要考虑假想的理想变压器, 把它改换成图 37.5。对于虚綫 A 的右边部分,

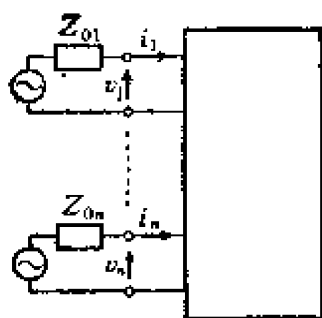


图 37.4

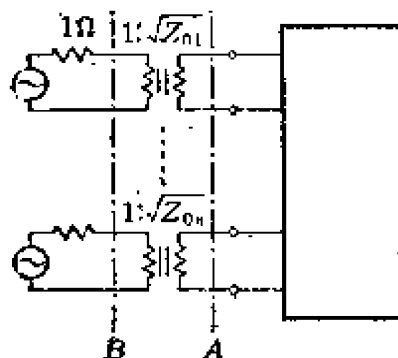


图 37.5

我們能用(37.4)的定义求出 S 矩陣,再按(37.10)变换成 Z 矩陣。設它为 Z_A , 則虚綫 B 的右边部分即最初考虑的部分的阻抗矩陣 Z 为

$$Z = N' Z_A N, \quad (37.12)$$

其中

$$N = \text{diag}(\sqrt{z_{01}}, \dots, \sqrt{z_{0n}}), \quad (37.13)$$

N 是一个对角綫元素从左上角起順次为 $\sqrt{z_{01}}, \dots, \sqrt{z_{0n}}$ 的对角形矩陣。

今举一个例子,設在图 37.5 內 $n=2$, z_{01} 和 z_{02} 是四端网络的影象阻抗。在虚綫 A 处求 S 矩陣:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix}, \quad s = e^{-\theta},$$

其中 θ 是影象傳輸常数。根据(37.10)求 Z_A :

$$Z_A = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1+s^2 & 2s \\ 2s & 1+s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \coth \theta & 1/\sinh \theta \\ 1/\sinh \theta & \coth \theta \end{pmatrix}.$$

再利用(37.12),就直接得出众所周知的关系

$$Z = \begin{pmatrix} z_{01} \coth \theta & \sqrt{z_{01} z_{02}}/\sinh \theta \\ \sqrt{z_{01} z_{02}}/\sinh \theta & z_{02} \coth \theta \end{pmatrix}.$$

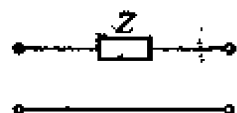


图 37.6

又在图 37.5 中虚綫 A 处求 S 矩陣时,如果有那个 z_{01}, \dots, z_{0n} 是电抗,則 S 的元素会变成无穷大。但对于实际的問題,这种情况沒有考虑的必要。

問題 1 虽然图 37.6 的四端网络沒有 Z 矩陣,但 S 矩陣为

$$S = \frac{1}{z+2} \begin{pmatrix} z & 2 \\ 2 & z \end{pmatrix}.$$

問題 2 在(37.4)內, 設 $e_2 = \dots = e_n = 0$, 即电源只加在端对 1 上, 端对 2 以下简单地只是电阻終端, 則 S 矩陣的元素为

$$s_{11}^2 = \left(\frac{1}{4} e_1^2 - v_1 i_1 \right) / \left(\frac{1}{4} e_1^2 \right),$$

$$s_{12}^2 = -v_2 i_2 / \left(\frac{1}{4} e_1^2 \right), \dots, s_{1n}^2 = -v_n i_n / \left(\frac{1}{4} e_1^2 \right).$$

問題 3 在上一題內, $n=2$, 即对于四端网络而言,

工作傳輸系数 $S_b = 1/s_{12}$,

反射傳輸系数 $T_e = 1/s_{11}$,

电压傳輸系数 $M_i = (1 - s_{11})/s_{12}$,

电流傳輸系数 $N_v = (1 + s_{11})/s_{12}$.

(在(37.4)內設 $v_2 + i_2 = 0$, 就可利用各个傳輸系数的定义。关于这些定义, 請参考第一篇。但在本篇內为了和其他記号区别起見, 采用了 T_e , M_i 和 N_v .)

§ 38 理想变压器网络和綫性变换

若把理想变压器网络和一个具有阻抗矩陣 Z 的 $2n$ 端网络相联接, 則得到一个阻抗矩陣为 $Z^{(1)} = N'ZN$ 的 $2n$ 端网络, 这就是对阻抗矩陣施行了綫性变换 (Cauer, 1932)。其中 N 是元素为实常数的

n 阶滿秩矩陣。我們首先考虑一些簡單的情况。在图 38.1 內, 由于

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \nu^{-1} v_r^{(1)}, \\ i_r &= \nu i_r^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (38.1)$$

于是

$$\left. \begin{aligned} V &= N_{rr}^{-1}(\nu) V^{(1)}, \\ I &= N_{rr}(\nu) I^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (38.2)$$

其中 $N_{rr}(\nu)$ 为第 (r, r) 元素是 ν , 其他元素全部为 1 的对角矩陣。其次在图 38.2 內,

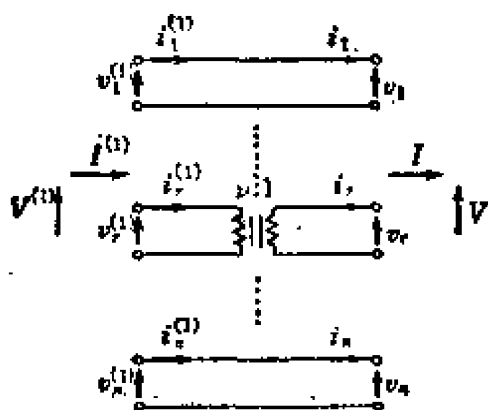


图 38.1

$$\begin{aligned} v_r &= v_r^{(1)}, \quad v_s = -\nu v_r^{(1)} + v_s^{(1)}, \\ i_r &= i_r^{(1)} + \nu i_s^{(1)}, \quad i_s = i_s^{(1)}. \end{aligned} \quad (38.3)$$

即

$$\begin{aligned} V &= N'_{rs}{}^{-1}(\nu) V^{(1)}, \\ I &= N_{rs}(\nu) I^{(1)}, \end{aligned} \quad (38.4)$$

其中 $N_{rs}(\nu)$ 为对角线上元素全是 1, 第 (r, s) 元素为 ν , 其他元素全部是 0 的矩阵。因此, 把 N 变形成对角矩阵的手续可以分段考虑并由矩阵论知道 N 一般可作如下的分解:

$$N = N_k N_{k-1} \cdots N_1, \quad (38.5)$$

其中 N_1, \dots, N_k 都是 $N_{rr}(\nu)$ 或 $N_{rs}(\nu)$ 形式的矩阵。于是

$$I = N I^{(1)} \quad (38.6)$$

的变换可按图 38.3 实现出来。对于电压, 则

$$V = N'_k{}^{-1} \cdots N'_1{}^{-1} V^{(1)},$$

即

$$V = N'^{-1} V^{(1)}. \quad (38.7)$$

现在考虑图 38.4 的网络。在此图中, 由于 $ZI = V$, 再参考 (38.6) 和 (38.7), 于是

$$N' Z N I^{(1)} = V^{(1)},$$

即

$$Z^{(1)} = N' Z N. \quad (38.8)$$

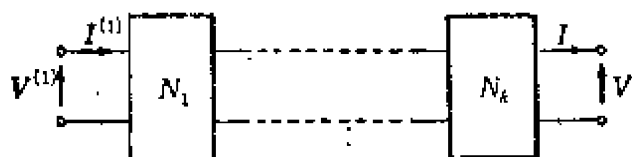


图 38.3

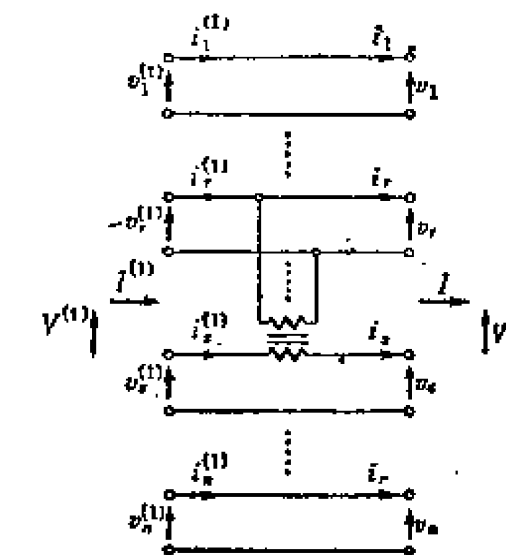


图 38.2

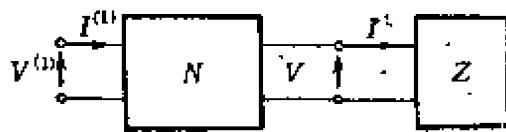


图 38.4

对于导纳矩阵的线性变换,也有同样的结果。 Z 矩阵和 Y 矩阵具有所谓“对偶”(dual)的关系,所以下面的讨论只对其中任一而言。在(38.5)的 N 的分解中,可以利用具有一对绕组的理想变压器的组合来实现线性变换。实现 $N_{r1}(\nu_1) \cdots N_{rn}(\nu_n)$ 时需要 n 个理想变压器,于是知道,这可以归结于具有 $(n+1)$ 个绕组的一个理想变压器。

问题 1 实现 $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。(这意味着端子的简单交换。但也能用(38.5)的形式实现出来。)

问题 2 证明图 38.3 的理想变压器网络的 S 矩阵是由下式给出的:

$$S_N = \begin{pmatrix} 2N'^{-1}(N'^{-1} + N)^{-1} - 1_n & 2(N' + N^{-1})^{-1} \\ 2(N' + N^{-1})^{-1} & 2N'(N' + N^{-1})^{-1} - 1_n \end{pmatrix},$$

其中 S_N 为正交矩阵。(利用(37.7)或(37.8)式。)

§ 39 电阻多端网络的综合

现在来求阻抗矩阵为常数矩阵

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \quad (39.1)$$

的 $2n$ 端网络。为了使 R 是一个实在的 $2n$ 端网络的阻抗矩阵, R 必须是非负值矩阵。这例如用下列的想法就可知道。假定 $2n$ 端网络的端子电压和电流都是直流,各记为 V 和 I , 则网络内部消耗的功率

$$I'V = I'RI \geq 0, \quad (39.2)$$

即 R 是非负值的。因此,若对 R 施行线性变换:

$$N'RN = \text{diag}(r_1, \cdots, r_n), \quad (39.3)$$

則

$$r_1, \dots, r_n \geq 0. \quad (39.4)$$

由于 r_1, \dots, r_n 代表 n 个电阻(也包括零), 于是利用理想变压器, 取

$$R = N'^{-1} \text{diag}(r_1, \dots, r_n) N^{-1} \quad (39.5)$$

就可把 R 实现出来。

以上的实现方法很简单, 但是如果限制所用的理想变压器(具有一对繞組的)的个数, 則也相当困难。这些也是与实际要求有关的重要問題, 然而至今沒有得出滿意的結果。这种問題是属于拓扑学的网络理論領域。

只有綫圈或电容器的网络的阻抗矩陣可取为 $j\omega L$ (j 是虚数单位, ω 是角頻率)或 $(j\omega)^{-1}D$, L 和 D 也是非負值的, 可以和 R 的情况进行同样的处理。綜合 $j\omega L$ 时, 理想变压器可用全耦合的或者不是全耦合的变压器所代替。

§ 40 正实矩陣

以上討論了简单的 $2n$ 端网络的綜合, 至于一般的 $2n$ 端网络的綜合, 必須研究作为复数頻率 $\lambda = \alpha + j\omega$ 的函数的阻抗矩陣的性质。假定 $Z(\lambda)$ 是某个 $2n$ 端网络的阻抗矩陣, 由 § 38 的叙述知道, $Z^{(1)}(\lambda) = N'Z(\lambda)N$ 也是实在的 $2n$ 端网络的阻抗矩陣。如果 N' 的第一行元素是 x_1, \dots, x_n ,

$$X' = (x_1, \dots, x_n), \quad (40.1)$$

則得 $Z^{(1)}$ 的 $(1, 1)$ 元素为

$$z_{11}^{(1)}(\lambda) = X'Z(\lambda)X. \quad (40.2)$$

$z_{11}^{(1)}(\lambda)$ 是二端网络的阻抗, 所以是一个正实函数(第一篇)。某个对称矩陣

这是因为 $N'FN$ 的实系数二次形式 $X'(N'FN)X = (NX)'F(NX)$ 是正实函数。

定理 4 正实矩阵的主子矩阵为正实矩阵。特别是, 对角线元素都是正实函数。

例如在 (40.1) 内, 设 $x_2 = \cdots = x_n = 0$, 则由正实矩阵的定义, 就可明白。

定理 5 正实矩阵的某个对角线元素如果恒等于零, 则该行(列)所有的元素都恒等于零。

例如 $f_{11} = 0$, 如果 $f_{12} \neq 0$, 则总存在 x_1 和 x_2 的值, 使二次形式

$$x_1^2 f_{11} + 2x_1 x_2 f_{12} + x_2^2 f_{22} = 2x_1 x_2 f_{12} + x_2^2 f_{22}$$

不是正实函数。利用定理 5, 可以证明下列一个重要定理。

定理 6 设 n 阶的正实矩阵 $F(\lambda)$ 的秩数为 $\rho (< n)$, 则经过线性变换, 可变为一个满秩的 ρ 阶主子矩阵, 而使其他的元素全部恒等于零。

$F(\lambda)$ 的秩数是 ρ , 所以它的所有的 $(\rho+1)$ 阶子行列式都恒等于零, ρ 阶子行列式至少有一个不恒等于零。在 $F(\lambda)$ 内, 设不恒等于零的 ρ 阶子行列式位在最初的 ρ 行, 这并不失去一般性。由于存在 λ 的正的实数值, 使这个子行列式不为零, 不妨令它为 λ_0 。如果把 $F(\lambda_0)$ 的最初 ρ 行和 ρ 列加于其他行和列上进行适当的线性变换 N , 则可使 $N'F(\lambda_0)N$ 的最后的 $(n-\rho)$ 行和列的元素全部成为零。 $N'F(\lambda)N$ 是正实矩阵, 它的对角线元素全部是正实函数, 于是第 $(\rho+1)$ 个以下的对角线元素在 $\lambda = \lambda_0$ 时可变成零, 结果恒等于零。因此, 由定理 5, $N'F(\lambda)N$ 的第 $(\rho+1)$ 行和列以下的元素全部恒等于零。由于秩数为 ρ , $N'F(\lambda)N$ 的左上角 ρ 阶主子矩阵是满秩的, 这正是 $F(\lambda)$ 的左上角的 ρ 阶主子矩阵, 所以就证明了这个定理。

由上面可知与滿秩的 ρ 阶子矩陣具有相同行(列)的 ρ 阶主子矩陣是滿秩的。反之,在一般情況下,如果有 r 阶主子矩陣不是滿秩的,那末与它有相同行(列)的 r 阶子矩陣也都不是滿秩的。

定理 7 若 $F(\lambda)$ 为滿秩的正实矩陣,則 $F^{-1}(\lambda)$ 也是正实矩陣。

首先来証明 $F^{-1}(\lambda)$ 满足定理 1 的条件(i)和(ii)。为此,由于 $F(\lambda)$ 满足定理 1 的条件(i)和(ii),作逆矩陣时可以証明 $|F(\lambda)|$ 在右半平面內沒有零点。今假定 $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $|F(\lambda_1)| = 0$, 于是存在一个 $(n, 1)$ 型的矩陣 E , 使得

$$F(\lambda_1)E = 0. \quad (40.4)$$

E 可分为实部和虚部:

$$E = X + jY. \quad (40.5)$$

X 和 Y 是元素为实数的 $(n, 1)$ 型矩陣。作出 $E'^* F E$:

$$\begin{aligned} E'^* F(\lambda) E &= (X' - jY') F(\lambda) (X + jY) \\ &= X' F X + Y' F Y - j(Y' F X - X' F Y) \\ &= X' F(\lambda) X + Y' F(\lambda) Y. \end{aligned} \quad (40.6)$$

右边各項是正实函数。然而按照(40.4),

$$X' F(\lambda_1) X + Y' F(\lambda_1) Y = 0,$$

由于在右半平面內具有零点的正实函数必須恒等于零,

$$X' F(\lambda) X \equiv 0, \quad Y' F(\lambda) Y \equiv 0. \quad (40.7)$$

X 和 Y 有一个不为零矩陣,例如設 $X \neq 0$, 則可作出一个滿秩的实的正方矩陣。根据(40.7), $N' F(\lambda) N$ 的第(1, 1)元素恒等于零,于是由定理 5, $N' F(\lambda) N$ 的第一行和列全部的元素恒等于零。即

$$|F(\lambda)| \equiv 0,$$

即 $F(\lambda)$ 不是滿秩的。

結果是,如果 $F(\lambda)$ 为滿秩的,那末 $|F(\lambda)|$ 在右半平面內不能有零点,所以 $F^{-1}(\lambda)$ 满足定理 1 的条件(i)和(ii)。其次,設有任

意的 $(n, 1)$ 型矩阵 $E (\neq 0)$, 在右半平面内,

$$\operatorname{Re} E'^* F^{-1}(\lambda) E = \operatorname{Re} ((F^{-1}E)')^* F(F^{-1}E)).$$

可是由于 (40.6) 式对于任意的 E 都是正实函数, 若以 $F^{-1}E$ 代替 E , 则知上式右边不为负。因此, $F^{-1}(\lambda)$ 满足定理 1 的条件 (iii)。于是证明了以上的定理。

利用定理 7, 由 Kirchhoff 方程可以直接导出阻抗矩阵是正实矩阵, 或者特别地, 阻抗是正实函数。下面叙述一个大概。Kirchhoff 方程一般可写成

$$V = AI, \quad (40.8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} V' &= (v_1, \dots, v_n, \dots, v_m), \\ I' &= (i_1, \dots, i_n, \dots, i_m), \\ A &= \lambda L + R + \lambda^{-1} D, \end{aligned} \right\} \quad (40.9)$$

m 为独立的回路数。 R, L 和 D 是非负值的 (见 § 39), 所以 A 是正实矩阵。如果把 (40.8) 写成

$$I = A^{-1}V, \quad (40.10)$$

则 A^{-1} 是正实矩阵。 A^{-1} 的左上角的 n 阶主子矩阵即是 $2n$ 端网络的导纳矩阵, 它的逆矩阵是阻抗矩阵, 于是根据定理 4 和 7, 它们是正实矩阵。

定理 8 如果以常数为元素的满秩对称矩阵的实部矩阵是一个非负值矩阵, 则逆矩阵的实部矩阵是秩数相同的非负值矩阵。

设 Z 是实部矩阵为非负值的对称矩阵, Z 可以看成某个特定频率下的阻抗矩阵。这是因为首先按 § 39 的方法作出 Z 的实部矩阵, 其次把虚部矩阵用线性变换进行对角线化, 由于对角线元素可用正负的电抗实现出来, 所以同样能作出虚部矩阵。将两者串联, 就实现了 Z 。但利用 (37.10), 可算出 $Z + Z^*$:

$$Z + Z^* = 2(1_n - S)^{-1}(1_n - SS^*)(1_n - S^*)^{-1}. \quad (40.11)$$

由于 $1_n - S$ 是满秩的, $Z + Z^*$ 的秩数等于 $1_n - SS^*$ 的秩数。同样对于 $Y = Z^{-1}$, $Y + Y^*$ 的秩数也等于 $1_n - SS^*$ 的秩数。即证明了这一定理。

这个定理也容易直接証明。 Z 的实部矩陣若为滿秩的, 由于存在一个实的綫性变换, 使实部矩陣和虚部矩陣同时对角綫化, 所以知道定理是成立的。对于实部矩陣不是滿秩的情况, 经过矩陣的适当变形, 也可試加証明。

§ 41 电抗 $2n$ 端网络的綜合

在电抗 $2n$ 端网络內, 根据 (40.2), 阻抗矩陣 Z 的二次形式 $X'ZX$ 必須滿足二端电抗的性质, 所以 Z 的极点只位在虛軸上, 按照定理 1 的条件 (iii'), Z 可以展成 (Cauer, 1931)

$$Z = \lambda^{-1}H^{(0)} + \sum_{p=1}^m \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_p^2} H^{(p)} + \lambda H^{(\infty)}. \quad (41.1)$$

由于这里的 $H^{(p)}$ 是非負值的矩陣, 且 $\lambda/(\lambda^2 + \omega_p^2)$ 表示 L 和 C 的并联回路, 所以 (41.1) 的各项可以用 § 39 的方法綜合出来。(41.1) 式对应于二端电抗的部分分式展开, 和二端网络的情况一样, 同样能进行連分式展开或对于导納的展开。进一步亦解决了求与 Z 对应的所有的电抗 $2n$ 端网络的問題 (Cauer, 1934)。再設 $H^{(p)}$ 的秩数为 b_p , 把理想变压器另作考虑, 則 Z 可用

$$\sigma = b_0 + 2 \sum_{p=1}^m b_p + b_{\infty} \quad (41.2)$$

个元件 (L 或 C) 綜合出来, 并且知道 σ 是最少的元件数目 (Cauer)。和二端网络一样, 以上的討論也能直接推广到由两类元件組成的 $2n$ 端网络。

§ 42 $2n$ 端网络綜合的概要

$2n$ 端网络綜合的基础是二端网络綜合。具有損耗的一般二端网络的綜合方法很多, 有最早且基本的 Brune 方法 (1931) (所用的 L 和 C 的个数最少, 然而如果以整个元件来合計, 一般还是用了多余的元件), 与滤波器有关的 Darlington, Piloty, Cauer, Occi 的方法 (1939~1940) (只用一个 R , 即 R 是最少的), 以及不

用互感的 Bott 及 Duffin 的方法(1949)(見第一篇)。前两者发展成为 2n 端网络的综合。这是因为如果限制不用互感或理想变压器, 则一般将不可能合成 2n 端网络, 数学的运算也非常不方便。其中关于四端网络, 由于实际需要, 研究种种附加条件下的综合方法, 最近是很盛行的。最初考虑 2n 端网络的综合, 是引用 Darlington 的方法系统。即以电阻终端的电抗多端网络形式来实现 2n 端网络, 此时使用的电阻数目为最少(大野, 1946; Bayard, 1949)。这个方法由于 S 矩阵的导入而发展了起来, 并且亦能在組織上处理所有的等效网络。 S 矩阵的方法是一般的, 它在应用数学上意义深长, 所以将另在下章中介绍。

这里只是简单地讲述推广 Brune 方法的 2n 端网络综合法(大野, 1947; McMillan, 1948)。这种方法给出 L 和 C 的数目最少的网络。假定给有一个阻抗 Z , 虚轴上的极点根据定理 1 可以用 § 41 的方法综合出来, 所以预先把它们悉行除去。如果对于所有的 ω , 都有 $|\operatorname{Re} Z(j\omega)| \neq 0$, 则能作出一个非负值矩阵 R , 使 $Z_0 = Z - R$ 仍为正实矩阵, 且在 $\omega = \omega_0$ 时, $|\operatorname{Re} Z_0(j\omega_0)| = 0$ 。其次, 取一个实常数的矩阵 ζ_1 , 使 $|Z_0 - \lambda \zeta_1|$ 在 $\lambda = j\omega_0$ 时等于零。于是 $(Z_0 - \lambda \zeta_1)^{-1}$ 在 $\lambda = j\omega_0$ 处有一个极点, 把它作为 $\lambda(\lambda^2 + \omega_0^2)^{-1} \zeta_2^{-1}$ 分出。这样若写成

$$Z(\lambda) = R + \lambda \zeta_1 + \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2} \zeta_2^{-1} + (\lambda \zeta_3 + Z_1(\lambda))^{-1} \right]^{-1}, \quad (42.1)$$

就和二端网络的情况有相同的形式:

$$z(\lambda) = r + \lambda L_1 + \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2} \frac{1}{L_2} + (\lambda L_3 + z_1(\lambda))^{-1} \right]^{-1}. \quad (42.2)$$

又

$$L_1^{-1} + L_2^{-1} + L_3^{-1} = 0 \quad (42.3)$$

的关系现在成为

$$\zeta_1^{-1} + \zeta_2^{-1} + \zeta_3^{-1} = 0. \quad (42.4)$$

$\lambda\zeta_1$, $\lambda(\lambda^2 + \omega_0^2)^{-1}\zeta_2^{-1}$ 和 $\lambda\zeta_3$ 一起組成一个可實現的網絡, 可以証明 Z_1 是比 Z 简单的正实矩陣。这种在形式上和二端網絡情况完全相同的綜合法是可能的, 并且也得出电抗元件数目最少的網絡, 然而在实际上, 尚有許多麻煩的問題。例如, ζ_1 等一般沒有逆矩陣。又 ζ_1 一般不是定符号的矩陣, 所以沒有相应于 $L_1 > 0$ 或 $L_1 < 0$ 的性质。 Z_1 比 Z 简单也有問題, 由于在 $|Z|$ 为常数时 $|Z_1|$ 是有理函数, 矩陣的复杂必須特殊考虑。关于这些問題, 这里都省略了, 只讲一种比較特殊的电阻数目用得最少的綜合方法。这是 Gewertz (1933) 的四端網絡理論的推广。

設給定的矩陣为 Z , 其中虛軸上的极点已經除去。 $\operatorname{Re} Z(j\omega)$ 的秩数若为 ρ , 則进行适当的綫性变换 N , 可得

$$N' \operatorname{Re} Z(j\omega) N = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_\rho, 0, \dots, 0). \quad (42.5)$$

这里的 N 和 (39.2) 的不同, 它的元素是 ω 的实系数有理函数。由于 d_t ($t=1, \dots, \rho$) 在虛軸上不能为負, 故

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \sum_{t=1}^{\rho} N'^{-1} D_t N^{-1}, \quad (42.6)$$

$$D_t = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, d_t, 0, \dots, 0), \quad (42.7)$$

$N'^{-1} D_t N^{-1}$ 为对应于 ω 的任意实数值的秩数为 1 的非負值矩陣。而且它的对角綫元素对于 ω 的实数值沒有极点。这是因为对角綫元素不会变成負, 如果有极点, 則根据 (42.6), $\operatorname{Re} Z(j\omega)$ 的对角綫元素也要有极点。由于 $N'^{-1} D_t N^{-1}$ 是非負值的, 所以对角綫元素以外的元素, 对于 ω 的实数值, 也不能有极点。按照上述, 可以求出滿足

$$\operatorname{Re} Z_t = N'^{-1} D_t N^{-1} \quad (42.8)$$

且在虛軸上沒有极点的正实矩陣 Z_t , 再按照 (42.6),

$$Z = \sum_{t=1}^{\rho} Z_t. \quad (42.9)$$

因此, Z 的綜合归結于在虛軸上实部矩陣的秩数为 1 的正实矩陣

的综合。首先假定 Z_t 是满秩的。由于 Z_t 在虚轴上没有极点, $Z_t(0) = \operatorname{Re} Z_t(0)$. 再由于 $|Z_t(0)| = 0$, 即 $|Z_t^{-1}(0)| = \infty$, Z_t^{-1} 在 $\lambda=0$ 处有极点, 同样, 在 $\lambda=\infty$ 也有极点, 于是能把这种极点从 Z_t^{-1} 分出。如果 Z_t 不是满秩的, 则根据定理 6, 预先作出阶数较低的矩阵, 然后依同法进行。如此得出的矩阵当然是正实矩阵, 然而它的实部矩阵的秩数在虚轴上是 1. 所以上面的步骤可以反复进行。这种步骤只重复有限多回, 这是要证明的, 但如果进入不再

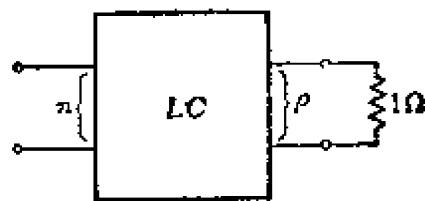


图 42.1

重复的状态, 则就到达正实函数。由于正实函数可以只用一个电阻的网络表出, 所以 Z_t 能用只含一个电阻的网络实现出来。 Z 是 Z_t ($t=1, \dots, \rho$) 的串联, 于是终接 ρ 个电阻的 Z 就综合成图 42.1 的形式。 Z 在虚轴上有极点的情况显然也是一样, 所以 Z 一般可表成 ρ 个电阻终接的电抗网络的形式。这种电抗网络以后可用 S 矩阵一般地求出, 以上大体上是按 Darlington 关于二端网络所得的结果进行一般化而推得。但在有 $\rho (\leq n)$ 个电阻的 $2n$ 端网络内, 对于 (40.8) 的 A 而言, $\operatorname{Re} A(j\omega)$ 的秩数为 ρ , 所以若注意定理 8 (§ 40) 且根据关于 (40.10) 的讨论, 阻抗矩阵的实部矩阵的秩数在虚轴上至多等于 ρ . 结果就有

定理 9 综合阻抗矩阵 Z 所必要的而且充分的电阻元件的数目等于 $\operatorname{Re} Z(j\omega)$ 的秩数。

以上为了综合出网络, 把阻抗矩阵依次地化简。这是对矩阵进行一种连分式展开, 但没有证明展开将以有限多回终止。为了把它一般化, 定义出表示矩阵复杂程度的位数 (degree) 概念是方便的。设 $F(\lambda)$ 是元素为 λ 的有理函数的矩阵。 $F(\lambda)$ (的元素) 若在 $\lambda=\lambda_1$ 有极点, 则 $F(\lambda)$ 的子行列式之中也在 $\lambda=\lambda_1$ 有极点。在这些极点的阶数内取最高的阶数, 就叫作 $F(\lambda)$ 的极点 λ_1 的位数。又定义 $F(\lambda)$ 全部极点的阶数之和为 $F(\lambda)$ 的位数。矩阵简单地就是有理函数的时候, 位数和阶数是同一回事。关于位数的讨论可以利用初等

因子的理論,把 F 的位数表成 $\delta(F)$ 时,位数的一个重要性质是 $\delta(F) = \delta(F^{-1})$. 又若 F_1 和 F_2 沒有公共的极点,則很容易推得 $\delta(F_1 + F_2) = \delta(F_1) + \delta(F_2)$, 利用这两个性质,就容易明白阻抗矩陣的展开是經過有限多回便終止的,这不需要特別說明。从(37.9)也能立即說出 Z 矩陣和 S 矩陣的位数是相等的。 Z 矩陣或 S 矩陣的位数給出了綜合网络时必要和充分的 L 和 C 的数目。在 § 41 內, (41.2) 的 σ 显然就是 Z 的位数。

第9章 多端网络和 S 矩阵

§43 有关 S 矩阵的基本定理

用任何方法综合 $2n$ 端网络时, 可得出含有 l 个电阻的网络。其中 $l \geq \rho$, ρ 是最少的电阻数目。把 l 个电阻分出来, 网络即如图 43.1 所示。由于将这些电阻全考虑为单位电阻并不失去一般性, 所以在给定 l 时如果有一般求电抗部分的方法, 则就求出了所有的等效网络。利用 S 矩阵这是可能的, 但为了做这件事, 首先要研究 S 矩阵的基本性质。

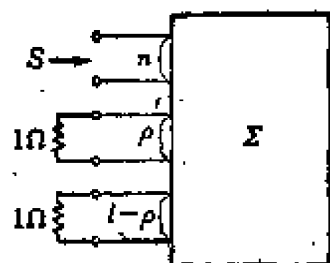


图 43.1

在(37.6)内, 由图 37.2 知道, η 是正实矩阵。因此根据(37.7), S 是对称矩阵, 并且右半平面内没有极点。又在(37.11)内, $1_n - S^*S$ 是非负值的, 利用记号

$$S_* = S(-\lambda),$$

在虚轴上 $S_* = S^*$, 所以 $1_n - S_*S$ 在虚轴上是非负值的 Hermite 矩阵。这就证明了下列的基本定理。

定理 10 S 为 $2n$ 端网络的 S 矩阵之必要和充分条件是

- (i) S 是对称的, 在 λ 的右半平面内没有极点。
- (ii) $1_n - S_*S$ 在虚轴上是非负值的 Hermite 矩阵。

或者(i)可换成

- (i') S 的元素的分母是 Hurwitz 多项式。

条件(ii)已经包含 S 在虚轴上没有极点。所以由(i)和(ii), 可以导出(i')。(i')和(ii)是重复的, 但因为(i')是重要的性质, 所以在这里特别把它写出来。条件(i)和(ii)的必要性已经在上面讲

过了。现证它的充分性。按照条件(i'), 用(37.7)定出的 η , 即

$$\eta = \frac{1}{2}(1_n - S) \quad (43.1)$$

在包含虚轴的 λ 的右半平面内没有极点。但由于

$$\eta + \eta_* = \frac{1}{2}(1_n - S_*)(1_n - S) + \frac{1}{2}(1_n - S_*S), \quad (43.2)$$

$\eta + \eta_*$ 在虚轴上是非负值的。因此, η 是正实矩阵。如果 $1_n - S$ 是满秩的, 则根据(43.1), η^{-1} 存在, 且也是正实的, 于是

$$Z = \eta^{-1} - 1_n \quad (43.3)$$

能满足 §40 定理 1 条件(i), (ii) 和 (iii') 之中关于虚轴上极点的条件。又根据(40.11), $Z + Z_*$ 在虚轴上是非负值的, 所以 Z 满足条件(iii'), 即 Z 是正实矩阵。 Z 有合成的可能, 已在上一节内讲过了。其次假定 $1_n - S$ 不是满秩的。按照(41.1), η 也不是满秩的, 所以设 η 的秩数为 $r < n$, 参照 §40 定理 6, 则可求出适当的满秩常数矩阵 N , 使 $N'\eta N$ 的最后 $(n-r)$ 行和列的元素全部为零。再用 Schmidt 方法, 使 N 的第 n 列和第 $(n-1)$ 列依次地正变化, 作出正交矩阵 T 。

N 的第 n 列乘以适当的常数后加至第 $(n-1)$ 列, 这两者就成为正交。其次, 第 n 列和第 $(n-1)$ 列都乘以适当的常数后加至第 $(n-2)$ 列, 这也成为正交的。以下同样用此方法可使全部的列成为正交, 最后在各列上乘以适当的常数, 可得出规格化的 T ,

$$TT' = 1_n.$$

由元素为复数的满秩矩阵同样能够作出酉矩阵。

$T'\eta T$ 的最后 $(n-r)$ 行和列的元素显然都是零。若设 $T'\eta T$ 左上角 r 阶的子矩阵为 η_0 , 则按照(37.7), 得到①

$$T'ST = 1_n - T'\eta T = (1_r - 2\eta_0) \dot{+} 1_{n-r} = S_0 \dot{+} 1_{n-r}, \quad (43.4)$$

① “+”表示矩阵的直接和。——译者注

其中

$$S_0 = 1_r - 2\eta_0, \quad (43.5)$$

$1_r - S_0$ 是满秩的。且因为 S_0 满足条件(i)和(ii), 所以与 S_0 对应的 Z_0 是一个正实矩阵。 Z_0 是可能合成的, 1_{n-r} 代表 $(n-r)$ 对的开路。又这里的 T 如下节所示, 可以用理想变压器网络实现出来。因此, 条件(i)和(ii)是充分条件。上面证明了这一定理, 在讲述用 S 矩阵的网络综合方法时还要给出这个定理的另一个证明。

电抗 $2n$ 端网络内不消耗功率, 所以根据(37.11), 在 λ 的整个平面上,

$$S_* S = 1_n. \quad (43.6)$$

一般地说, 满足关系

$$U_* U = 1_n \quad (43.7)$$

的矩阵 U , 即在虚轴上是酉矩阵, 被叫作对酉矩阵(para-unitary matrix), 由(43.6)可得

系 一个矩阵 Σ 将为一个电抗 $2n$ 端网络的 S 矩阵的必要和充分条件是 Σ 在右半平面内没有极点, 且是一个对称的对酉矩阵。

现设给定的电抗 $2n$ 端网络的阻抗矩阵如(41.1)式所示。令 φ 为 $|\eta^{-1}| = |1_n + Z|$ 的分子, 分母为 $\lambda^{b_n}(\lambda^2 + \omega_1^2)^{b_1} \cdots (\lambda^2 + \omega_m^2)^{b_m}$, 于是 φ 的次数按照 $\lambda = \infty$ 来考虑, 就是(41.2)的 σ 。又因为 η 如前所述是在虚轴上没有极点的正实矩阵, 所以 φ 是 σ 次的 Hurwitz 多项式。若注意 $Z_* = -Z$, 且根据(37.9),

$$\Sigma = (-Z_* - 1_n)(Z + 1_n)^{-1} = -\eta_*^{-1}\eta,$$

故

$$|\Sigma| = \pm \varphi_*/\varphi,$$

$|\Sigma|$ 的次数即是 σ 。对于 Z 不存在的场合, 参照(43.4), 也能得出下列定理。

定理 11 综合 Σ 时必要和充分的 L 和 C 的数目等于 $|\Sigma|$ 的次数。

§ 44 滤波器与S矩陣

在第一篇內已經討論了滤波器的工作特性理論,这也能用S矩陣的理論来讲述。若設电抗四端网络的S矩陣为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad (44.1)$$

由于按§ 37的問題3很容易得出 $S_{11}=1/\sigma_{12}$ 等关系,所以滤波器的工作特性从S矩陣来看最易理解。若 g_0 为 Σ 各个元素的最小公分母,則可写出

$$\Sigma = \frac{1}{g_0} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}. \quad (44.2)$$

根据上一节定理10的条件(i'), g_0 是Hurwitz多項式,則 Σ 是对酉矩陣的条件为

$$k_{11*}k_{11} + k_{21*}k_{21} = g_{0*}g_0, \quad (44.3)$$

$$k_{11*}k_{21} + k_{21*}k_{22} = 0. \quad (44.4)$$

一般不討論 $k_{21} \equiv 0$ 的情况,所以設 $k_{21} \neq 0$,則由(44.4),

$$k_{22} = -k_{11*}k_{21}/k_{21*}. \quad (44.5)$$

如果 k_{21} 是偶或奇多項式,則

$$k_{22} = \mp k_{11*}. \quad (44.6)$$

再在 σ_{21} 的分母和分子上乘以适当的多項式 ψ ,設

$$\sigma_{21} = f/g, \quad f = k_{21}\psi, \quad g = g_0\psi, \quad (44.7)$$

使 f 为偶或奇多項式,則

$$\Sigma = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} h & f \\ f & \mp h_* \end{pmatrix}, \quad (44.8)$$

其中

$$hh_* \pm f^2 = g_*g, \quad (44.9)$$

式内的复号当 f 为偶时取 $+$, 奇时取 $-$ 。下面将说明 g 是 Hurwitz 多项式, 且能唯一决定。现设 k_{21} 和 k_{21*} 的公因式为 f_0 , f_0 当然是偶或奇多项式。若写

$$k_{21} = f_0 \psi_{0*}, \quad (44.10)$$

则由 (44.5),

$$k_{22} = \mp k_{11*} \psi_{0*} / \psi_0,$$

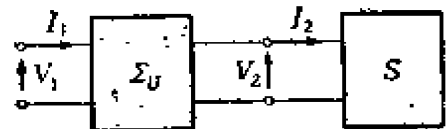
k_{22} 是一个多项式, 所以 k_{11*} 应被 ψ_0 除尽, 且 k_{22} 含有因子 ψ_{0*} 。结果 k_{11} , k_{21} 和 k_{22} 任一个都有因子 ψ_{0*} 。因此, 由 (44.3), g_0, g_0 被 $\psi_{0*} \psi_0$ 除尽。但 g_0 是最小的公分母, 和 ψ_{0*} 没有公因子, 所以 g_{0*} 必须被 ψ_{0*} 除尽。即 ψ_0 是 g_0 的因子, ψ_0 是一个 Hurwitz 多项式。因此, 在 (44.7) 内, 设 $\psi = \psi_0$, Σ 写成 (44.8) 的形式, 且 f 为偶或奇多项式, 则使 g 为 Hurwitz 多项式的 ψ 不外就是 ψ_0 。这里的 f, g 和 h 和 Cauer (1940) 所用的记号是完全相同的, 把它归结为 (44.8) 的形式, 就对滤波器在输入和输出端的区别上有了全面的理解。

§ 45 全通网络

我们来研究 S 矩阵的变换与实际回路的对应。

定理 12 若 U 为右半平面内没有极点的 n 阶对酉矩阵, 则 S 的对酉变换 $U'SU$ 能在 $2n$ 端网络 S 上联接一个全通 $4n$ 端网络

$$\Sigma_U = \begin{pmatrix} 0 & U' \\ U & 0 \end{pmatrix} \quad (45.1)$$



实现出来。

在图 45.1 内, 根据 S 矩阵的定义,

图 45.1

$$S(V_2 + I_2) = V_2 - I_2, \quad (45.2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & U' \\ U & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 + I_1 \\ V_2 - I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 - I_1 \\ V_2 + I_2 \end{pmatrix}. \quad (45.3)$$

特別 U 是正交矩陣时, 把它用 T 表示, 且 Σ_U 亦写成 Σ_T , 則由 (45.3),

$$V_2 = T'^{-1}V_1, \quad I_2 = TI_1, \quad (45.4)$$

按照 (38.6) 和 (38.7), Σ_T 是由理想变压器組成的 $4n$ 端网络。把 (45.4) 代入 (45.2) 內,

$$T'ST(V_1 + I_1) = V_1 - I_1, \quad (45.5)$$

即 S 矩陣的正交变换可以用理想变压器网络实现出来。且这是定理 10 (§ 43) 的证明中保留的一点。但由于 Σ_U 满足定理 10 系的条件, 所以能用电抗 $4n$ 端网络实现出来。又把 (45.3) 代入 (45.2) 內,

$$U'SU(V_1 + I_1) = V_1 - I_1, \quad (45.6)$$

这就证明了定理。如果 S 是零矩陣, 則 $U'SU$ 也是零矩陣, 由于 n 阶的零矩陣意謂 n 个单位电阻, 所以 Σ_U 代表一般化的全通网络。

問題 若 Σ_U 代表一个四端网络, 則它的阻抗矩陣可写成

$$Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s + s^{-1} & s - s^{-1} \\ s - s^{-1} & s + s^{-1} \end{pmatrix}.$$

§ 46 利用 S 矩陣的 $2n$ 端网络綜合法

給定的 S 矩陣为 S 时, 为了綜合出这个 $2n$ 端网络, 在 S 上适当地加入 l 行和 l 列元素, 作出

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}_l^n \quad (\Sigma_{11} = S), \quad (46.1)$$

Σ 满足定理 10 系 (§ 43)。它表成电抗 $2(n+l)$ 端网络, 把它終接 l 个电阻, 則按照 § 37 末所述, 就得出 S 。因为求出了表現 Σ 的全部电抗 $2(n+l)$ 端网络, 所以若把 (46.1) 的 Σ 全部求出, 則就得出 S 的全部等效网络。

設 S 的各个元素的最小公分母是 g_0 (最高次項的系数为 1),

則 Σ 可写成下列形式:

$$\Sigma = g_0^{-1} \begin{pmatrix} K & K'_{21} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}_i^n, \quad (46.2)$$

其中

$$K = g_0 S, \quad K_{21} = g_0 \Sigma_{21}, \quad K_{22} = g_0 \Sigma_{22},$$

K 的元素都是多項式, K_{21} 和 K_{22} 的元素一般是有理函数。为了使 Σ 是对酉矩陣, 必要和充分的条件是

$$(H =) g_{0*} g_0 1_n - K_* K = K'_{21*} K_{21}, \quad (46.3)$$

$$K_* K'_{21} + K'_{21*} K_{22} = 0, \quad (46.4)$$

$$g_{0*} g_0 1_l - K_{22*} K_{22} = K_{21*} K'_{21}. \quad (46.5)$$

(46.3) 的左边, 根据定理 10 (§ 43) 的条件 (ii), 是在虛軸上非負值的 Hermite 矩陣, 令它为 H 。令 H 的秩数为 ρ , 則由 (46.3), 当然有

$$l \geq \rho. \quad (46.6)$$

如果注意 (40.11) 式, 那末知道它和定理 9 有关。满足 (46.1) 的 Σ 有无数多个, 我們首先求出有代表性的一个。当 S 补充成 (46.1) 即 (46.2) 时, 根据 (46.3), 必須把 H 分解成 K'_{21*} 与 K_{21} 之积的形式。 K_{21} 的元素考虑成多項式的分解。設 P_1 和 Q_1 为行列式不等于零的常数的适当的 n 次多項式矩陣, 則 K 可写成如下的形式:

$$K = Q_1 A_k P_1, \quad (46.7)$$

其中

$$A_k = \text{diag}(k_1, \dots, k_n). \quad (46.8)$$

k_i ($i=1, \dots, n$) 是 K 的初等因子, 对于超过 K 的秩数的 i , $k_i=0$ 。

任意多項式矩陣能用 (46.7) 的形式表出。多項式矩陣所有的 i 阶子行列式的最大公因子叫作第 i 行列式因子, 第 i 行列式因子除以第 $(i-1)$ 行列式因子所得的叫作第 i 初等因子。第 $(i-1)$ 初等因子是第 i 初等因子的因

子,初等因子的这种性质在以下讨论中需特别注意。 $k_1 \cdots k_i$ 是 K 的第 i 行列式因子, k_i 是 K 的第 i 初等因子。又 k_i 被 k_{i-1} 除尽。在初等因子中,最高次项的系数设为 1。

假定 k_i 和 g_0 的最大公因子为 k_{0i} , 若令

$$A_1 = \text{diag}(k_{01}, \cdots, k_{0n}), \quad (46.9)$$

则根据 (46.3) 和 (46.7), $A_1^{-1} P_1'^{-1} H P_1^{-1} A_1^{-1}$ 是一个多项式矩阵,于是能写出

$$H = A_{1*} P_{1*}' H_1 P_1 A_1, \quad (46.10)$$

H_1 是秩数为 ρ 的多项式矩阵且是虚轴上非负值的 Hermite 矩阵。令 H_1 的初等因子为 $h_1, \cdots, h_\rho, 0, \cdots, 0$, 由于 $H_1 = H_{1*}$, 它是一个偶或奇的多项式, 且和 (46.7) 一样能写成

$$H_1 = Q_2 \text{diag}(h_1, \cdots, h_\rho, 0, \cdots, 0) P_2. \quad (46.11)$$

按照 (46.11), $H_1 P_2^{-1}$ 的第 i 列元素 ($i \leq \rho$) 能被 h_i 除尽, 对于 $i > \rho$, 则为零。 $P_{2*}'^{-1} H_1 P_2^{-1}$ 的第 i 列也有同样情况, 且由 $P_{2*}'^{-1} H_1 P_2^{-1}$ 的形式, 对于第 i 行的元素也是这样。即 $P_2'^{-1} H_1 P_2^{-1}$ 内左上角 ρ 阶主子矩阵表现为 H_ρ , 而 H_ρ 以外的元素全部为零。又 H_ρ 是满秩的, 它的第 i 行和列 ($i = 1, \cdots, \rho$) 的元素能被 h_i 除尽。因此, 引入记号

$$\mathbf{1}_{\rho, n} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_\rho & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n-\rho} \end{pmatrix}, \quad (46.12)$$

我们得到

$$P_{2*}'^{-1} H_1 P_2^{-1} = \mathbf{1}_{\rho, n}' H_\rho \mathbf{1}_{\rho, n}, \quad (46.13)$$

即

$$H_1 = P_{2*}' \mathbf{1}_{\rho, n}' H_\rho \mathbf{1}_{\rho, n} P_{2*}. \quad (46.14)$$

这里让我们研究 h_i 的性质。在 h_i 中, 若令平方形式的最高次的偶或奇多项式为 f_i (最高次项的系数为 1), 则可写出

$$h_i = (f_i)^2 \varphi_i = \pm f_i f_{i*} \varphi_i. \quad (46.15)$$

复号对应于 f_i 的偶和奇。由于 φ_i 没有平方的因式, 所以是一个只

有 1 阶零点的偶或奇多項式。因此写出

$$h_i = \pm f_i f_{i*} \psi_i \psi_{i*} \varphi_{0i},$$

ψ_i 是只有 1 阶零点的 Hurwitz 多項式, φ_{0i} 是只有虛軸上 1 阶零点的多項式。它們的最高次項系数都是 1。下面証明 φ_{0i} 是一个实常数。令

$$\Lambda = \text{diag}(f_{1*} \psi_{1*}, \dots, f_{p*} \psi_{p*}),$$

$$\Lambda_\varphi = \text{diag}(\varphi_{01}, \dots, \varphi_{0\rho}),$$

H_p 可写成

$$H_p = \Lambda_\varphi \Lambda_* H_0 \Lambda,$$

其中 H_0 是一个多項式矩陣, $|H_0|$ 是一个不等于零的常数。可是 H_p 的第 (i, i) 元素被 h_i 除尽, 根据非負值的条件, 在虛軸上不能为負, 即不能变号, 所以在虛軸沒有奇数阶的零点。但是, h_i 在虛軸上有奇数阶零点时, 即 φ_{0i} 不是一个常数时, (i, i) 元素必須被 $h_i \varphi_{0i}$ 除尽。就是說, h_i, \dots, h_{i+p-1} 在虛軸上一点处有 ν (奇数) 阶的零点, $(i, i), \dots, (i+p-1, i+p-1)$ 的对角綫元素至少有 $(\nu+1)$ 阶零点。含有这种对角綫元素的 p 阶主子矩陣的全部元素, 按照正值条件, 至少有 $(\nu+1)$ 阶零点。于是 H_p 就是这种形式, 前述的 H_0 不仅是多項式矩陣; 并且 $H_0 \Lambda_\varphi^{-1}$ 也是多項式矩陣。这和 $|H_0|$ 为常数的說法是相違反的。即 φ_{0i} ($i=1, \dots, \rho$) 必須是常数。結果得出

$$h_i = \pm f_i f_{i*} \psi_i \psi_{i*} \quad (i=1, \dots, \rho), \quad (46.16)$$

$$\Lambda = \text{diag}(f_{1*} \psi_{1*}, \dots, f_{p*} \psi_{p*}), \quad (46.17)$$

$$H_p = \Lambda_* H_0 \Lambda. \quad (46.18)$$

f_i 是偶或奇多項式, ψ_i 是只有一阶零点的 Hurwitz 多項式, H_0 是多項式矩陣, 且是一个在虛軸上非負值的 Hermite 矩陣, $|H_0|$ 是不等于零的常数。

以上也許不容易理解, h_i 的某个素因子是含在 H_p 和 H_0 各个元素中某

个幂次内, 須注意 h_{i-1} 是 h_i 的因子, 再擇一較好的例子来图解, 則比較容易清楚。

以后証明 H_0 可分解成

$$H_0 = P'_0 P_0. \quad (46.19)$$

P_0 是 ρ 阶的多項式矩陣, $|P_0|$ 当然是不等于零的常数。总结一下, 可得

$$H = P'_* \Lambda'_{\rho, n} \Lambda_* P'_0 P_0 \Lambda_{\rho, n} P, \quad (46.20)$$

其中

$$P = P_2 \Lambda_1 P_1. \quad (46.21)$$

H_0 是 ρ 阶多項式矩陣, 不失一般性, 我們可以假定它的 ρ 个对角綫元素自左上角按 λ 次数的增加而排列。由于 H_0 是滿秩的, 且是虛軸上非負值的 Hermite 矩陣, 所以各个对角綫元素是偶次的, 并且不等于零。令 (ρ, ρ) 元素的次数为 δ 。如果 $\delta=0$, 則 H_0 是一个常数矩陣, 参照 (39.3), 在对角綫矩陣中, 取对角綫元素的平方根直接分解。如果 $\delta \neq 0$, 則可选择一个对角綫元素为 1 或 λ 的正幂次的适当的对角綫矩陣 A_0 , 使 $A_0 H_0 A_0$ 的所有的对角綫元素均为 δ 次的。于是 $A_0 H_0 A_0$ 全部的元素最高是 δ 次的, 因为 $A_0 H_0 A_0$ 在虛軸上是非負值的。再由于 $|H_0|$ 是常数, $|A_0|$ 最高不超过 $\delta(\rho-1)$ 次, 所以 $|A_0 H_0 A_0|$ 最高是 $\delta(\rho-1)$ 次。因此, 若由 $A_0 H_0 A_0$ 的元素的 λ^δ 項系数作出矩陣 C_0 , 則 $|C_0| = 0$ 。假定 C_0 左上角 $(\rho-1)$ 阶主子行列式不等于零, 則把 C_0 的最初 $(\rho-1)$ 列乘以适当常数后加至第 ρ 列, 可找到一个綫性变换 A_0 , 使 $A'_0 C_0 A_0$ 的第 ρ 行和列的元素变成零。如果令 $A_1 = A_0 A_0 A_0^{-1}$, 則由 $|A_1| = 1$ 和 A_0 的形式知道, A_1 是一个多項式矩陣, 且 $A_1 H_0 A_1$ 的 (ρ, ρ) 元素的次数, 最高等于 $\delta-2$ 。再由于 $|C_0| = 0$, 且 C_0 的 $(1, 1)$ 元素不等于零, 所以 C_0 左上角 $(r-1)$ 阶主子行列式不等于零, 而 r 阶的等于零, 这样的 r 是存在的。因此, 和以前讲的 $r=\rho$ 的情况一样, (r, r) 元素的次数至少可以降低二次。反复进行, 最后可使全部的元素都为常数, 达到非負值矩陣而得出 (46.19)。

其次令

$$J_{21} = P_0 \Lambda_{\rho, n} P, \quad (46.22)$$

J_{21} 是 (ρ, n) 型的多項式矩陣, 按照 (46.20),

$$H = J'_{21*} J_{21}, \quad (46.23)$$

它和(46.3)是同一形式。于是可得一个适当的矩陣 J_{22} , 且作出对酉矩陣

$$\Sigma_R = g_0^{-1} \begin{pmatrix} K & J'_{21} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad (46.24)$$

我們引入記号

$$J_{21}^{-1} = P^{-1} 1'_{\rho, n} \Lambda^{-1} P_0^{-1}, \quad (46.25)$$

則由(46.22),

$$J_{21} J_{21}^{-1} = 1_{\rho}. \quad (46.26)$$

其次注意(46.4), 作出

$$J_{22} = -J_{21} K_* J_{21*}^{-1}, \quad (46.27)$$

J_{22} 是 ρ 阶的矩陣, 且由(46.26)和(46.23),

$$\begin{aligned} J_{22} &= -(J_{21*}^{-1} J'_{21*}) J_{21} K_* J_{21*}^{-1} \\ &= -J_{21*}^{-1} H K_* J_{21*}^{-1}, \end{aligned} \quad (46.28)$$

由于 $H K_*$ 按(46.3)是一个对称矩陣, 所以 J_{22} 是对称矩陣。 J_{21} 和 J_{22} 满足(46.4)和(46.5)的条件, 这只要注意 $H K_* = K_* H_*$ 且經過少許計算就可明白。即 Σ_R 是对酉的。然后来証明 Σ_R 在右半平面內沒有极点。把(46.20), (46.22), (46.23)和(46.25)代入(46.28), 可算出

$$J_{22} = -P_0 \Lambda K_{\rho*} \Lambda_*^{-1} P_0^{-1} = -P_0'^{-1} \Lambda_*^{-1} H_{\rho} K_{\rho*} \Lambda_*^{-1} P_0'^{-1}, \quad (46.29)$$

其中

$$K_{\rho*} = 1_{\rho, n} P K_* P_*^{-1} 1'_{\rho, n}. \quad (46.30)$$

K_{ρ} 是 ρ 阶的多項式矩陣, $H_{\rho} K_{\rho*}$ 是按 J_{22} 的对称性而对称的。因此, $H_{\rho} K_{\rho*}$ 的第 i 行和列的元素能被 h_i 除尽, $\Lambda_*^{-1} H_{\rho} K_{\rho*} \Lambda_*^{-1}$ 是多項式矩陣, 又 $\Lambda_*^{-1} \Lambda$ 依照(46.17)在右半平面內沒有极点, 所以

$$\Lambda_*^{-1} H_{\rho} K_{\rho*} \Lambda_*^{-1} = (\Lambda_*^{-1} \Lambda) \Lambda^{-1} H_{\rho} K_{\rho*} \Lambda_*^{-1}$$

在右半平面內也沒有极点。 J_{22} 也是这样。結果 Σ_R 滿足定理 10

系 (§ 43) 的条件, 可以表成一个电抗 $2(n+l)$ 端网络。我们将称这个网络为正规网络。为了利用定理 11 (§ 43), 我们算出

$$|\Sigma_R| = \pm \frac{g_{0*}^n}{g_0^n} \frac{|A_1| |A|}{|A_{1*}| |A_*|}. \quad (46.31)$$

作为满足 (46.1) 的一个 Σ , 现在求出了 Σ_R , 根据对酉矩阵的性质, 对于 $l=\rho$, 可以有

$$\Sigma = (1_n + U') \Sigma_R (1_n + U). \quad (46.32)$$

对于 $l > \rho$, $(l-\rho)$ 阶的任意对酉矩阵设为 $\Sigma_{l-\rho}$, 可得

$$\Sigma = (1_n + U') (\Sigma_R + \Sigma_{l-\rho}) (1_n + U). \quad (46.33)$$

其中 U 是 l 阶对酉矩阵, 且 Σ 在右半平面内没有极点。现在假定

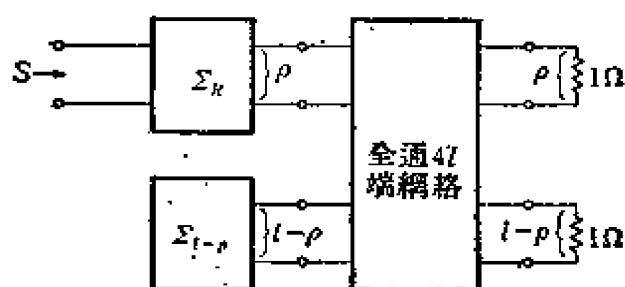


图 46.1

$\Sigma_{l-\rho}$ 在右半平面内也没有极点, 这并不失去一般性。因为 $\Sigma_{l-\rho}$ 在右半平面有极点时, 只要从左和右乘以适当的对角形对酉矩阵, 很容易变换成右半平面内没有极点的矩阵。把变换后的矩阵代入 (46.33) 的 $\Sigma_{l-\rho}$, 在 U 内便包含了上述变换的反变换。于是参照定理 12 (§ 45), 可得

定理 13 $2n$ 端网络 S 的全部等效网络就是在正规网络 Σ_R 上加上任意电抗 $2(l-\rho)$ 端网络所成的 $2(n+l)$ 端电抗网络, 由此即得以 l 个单位电阻为终端的 $2l$ 对端子的全通网络 (图 46.1)。

上面讲的全通网络就是与 (46.32) 和 (46.33) 的 U 对应的网络, 这个 U 一般在右半平面内有极点。因此, 全通网络内一般含有负元件。特别, 如果 U 只在左半平面内有极点, 那末就可作为普通的无源全通网络抽取出来。从电阻端子对如果不能抽取无源的全通网络, 那末我们和四端网络的情况一样, 就说是达到最小相移的状态。最小相移的方法由于篇幅限制, 这里就省略了, 但下面

介紹一些与它有关的事項。

在(46.32)內,由 Σ_R 抽出全通網絡后剩下的最小相移網絡用 Σ_M 表示, Σ_M 是电阻端子对数目最少的 Σ 之中, L 和 C 数目最少的網絡,因此 Σ_M 亦叫作最小網絡(minimal network)。下面的例子表明, Σ_M 不是唯一的,但 $|\Sigma_M|$ 是唯一的。然而另进行正交变换,則 Σ_M 也能唯一地决定。(46.33)的 $\Sigma_{l-\rho}$ 可以考虑成 $(l-\rho)$ 个二端網絡,且每一个等效網絡都能根据这些二端網絡进行分类。但在四端網絡中

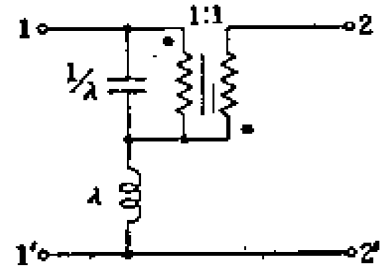


图 46.2

我們知道,全通網絡含有的 L 和 C 的数目是相同的(图 46.2),同样,一般的全通網絡也如此。因此,在 Σ_R 內把多余的元件按照(46.32)抽出时,只能以一对 L 和 C 的形式来抽取。然而在 Σ_M 內,尚不知道多余的 L 或 C 能不能以半端的形式剩留下来。現在假定在 Σ_M 內,各含有 n_1 和 n_2 个半端形式的 L 和 C ,此时作为 $\Sigma_{l-\rho}$ 加入适当的 n_2 和 n_1 个 L 和 C 以后,就可当作全通網絡把它們全部取出。由于 $\Sigma_{l-\rho}$ 至多是 (n_1+n_2) 阶的对角矩陣,电阻端子对的增加至多是 (n_1+n_2) 。所以一般說来,满足(46.33)的 Σ 如果有多余的 L 和 C ,則能用增加电阻端子对的数目来移去,增加的端子对数目不超过多余电抗的数目。因此有

定理 14 L 和 C 数目最少的網絡中,存在 L, R 和 C (理想变压器除外)数目最少的網絡。

L 和 C 的数目为最少的 Σ 用 Σ_m 表示,則 $|\Sigma_m|$ 唯一地由

$$|\Sigma_m| = \pm g_0^n g_0^{-n} |A_1| |A_1^*|^{-1} \quad (46.34)$$

給出。 $|\Sigma_m|$ 对于 λ 的次数,就是合成 Σ_m 即 S 时所需的 L 和 C 的最小数目。在 § 42 末讲到了位数,这就等于 S 的位数。 Σ_m 有許多,其中在(46.1)內求出 l 为最小的即电阻端子对数为最少的網絡,根据定理 14,就得到 L, R, C 数目最小的網絡。

例1 Σ_M 不是唯一的场合。设给定

$$S = \frac{1}{\lambda^2 + \sqrt{19}\lambda + 5} \begin{pmatrix} \lambda+3 & 0 \\ 0 & -\lambda-3 \end{pmatrix},$$

则可求出 Σ_R 为

$$\Sigma_R = \frac{1}{\lambda^2 + \sqrt{19}\lambda + 5} \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda+3 & 0 & \lambda^2-4 & 0 \\ 0 & -\lambda-3 & 0 & \lambda^2-4 \\ \hline \lambda^2-4 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & \lambda^2-4 & 0 & -\lambda+3 \end{array} \right).$$

Σ_R 是最小相移的,可是还存在一个最小网络

$$\Sigma_M = \frac{1}{\lambda^2 + \sqrt{19}\lambda + 5} \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda+3 & 0 & \lambda^2+4 & 4\lambda \\ 0 & -\lambda-3 & 4\lambda & \lambda^2+4 \\ \hline \lambda^2+4 & 4\lambda & \lambda-3 & 0 \\ 4\lambda & \lambda^2+4 & 0 & \lambda-3 \end{array} \right).$$

例2 最少元件数目的网络。现考虑

$$S = \frac{4}{\lambda+5}.$$

由于 $Z = (\lambda+9)/(\lambda+1)$, 它很容易综合成图 46.3 的样子。另一方面, 我们得到

$$\Sigma_R = \Sigma_M = \frac{1}{\lambda+5} \begin{pmatrix} 4 & -\lambda+3 \\ -\lambda+3 & 4\frac{\lambda-3}{\lambda+3} \end{pmatrix},$$

它如图 46.4 所示, 包含一个电感和一个电容。这个 L 可以在 (46.33) 内加一个 C 作为 $\Sigma_{L-p} = (-\lambda+3)/(\lambda+3)$ 抽出一个全通网络而移去。结果得到

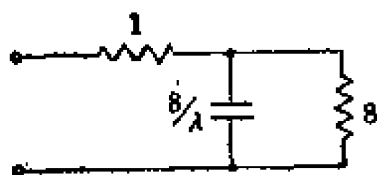


图 46.3

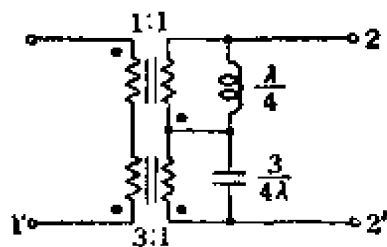


图 46.4

$$\Sigma_m = \frac{1}{\lambda + 5} \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{3}(\lambda + 9) & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda \\ -\frac{1}{3}(\lambda + 9) & -\frac{4}{9}(2\lambda + 9) & \frac{2\sqrt{2}}{9}\lambda \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda & \frac{2\sqrt{2}}{9}\lambda & \frac{1}{9}(-\lambda + 45) \end{pmatrix},$$

終接两个电阻后,这就是图 46.3 的网络。

§ 47 非互易 $2n$ 端网络

导入了理想回轉器 (Tellegen, 1948), 就能研究不满足互易定理的无源网络。对于这种网络, 必须考虑非对称的正实矩阵。我們有下列的定义。

定义 F 在右半平面內滿秩, 若 $F + F^*$ 在右半平面上是非負值的 Hermite 矩阵, 則 F 称为广义的正实矩阵。

对于广义的正实矩阵, 也可以和通常对称的正实矩阵一样地进行討論。若在这种基础上研究非互易 $2n$ 端网络的 S 矩阵, 則可得出和定理 10 (§ 43) 差不多的一个定理, 只不过現在沒有 S 的对称限制, 且現在以 $1_n - S'_* S$ 代替 $1_n - S_* S$ 。对于无損耗的 $2n$ 端网络的 S 矩阵 S , $S'_* S = 1_n$ 成立, S 可用 L, C , 理想变压器和理想回轉器綜合出来, $|S|$ 的次数可表成 L 和 C 的个数。 S 的对酉变换是 $U_2 S U_1$, 与它对应的全通网络和 (45.1) 不同, 是下列的形式:

$$\Sigma_U = \begin{pmatrix} 0 & U_2 \\ U_1 & 0 \end{pmatrix},$$

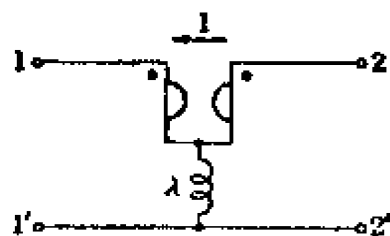


图 47.1

例如在四端网络的情况下, 就是图 47.1 所示的全通网络。因此, 利用非互易全

通网络, 可以不加 Σ_{L-C} , 即不增加电阻端子对而把上节所述的半端形的多余的 L 或 C 除去。就是說, 通常的互易 $2n$ 端网络若用

含有理想回轉器的回路实现时,一般 L, C, R 的数目将减少。对于有損耗的 $2n$ 端网络,在給定的矩阵上也可添补而作出对酉矩阵。于是非互易的 $2n$ 端网络能进行几乎和互易的 $2n$ 端网络相平行的处理。可是在具体内容上,考虑到非互易网络的特点,有趣的问题是很多的。例如决定理想回轉器的最小数目等问题,这些本质的问题尚未解决。再有所謂有源网络是限于綫性的网络,这些东西可以說还不很清楚。在互易的网络内若包含了理想变压器关系的问题,则可以期待网络綜合理論新的发展。

参 考 文 献

这里的文献只限于少数的论文和书籍,按章节的次序列举于下,且附加了简单的说明。

論 文

- [1] O. Brune: Synthesis of a finite two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency, J. M. P. 10 (1931), 191~236.

这里最初定义了正实函数,它是一般二端网络综合法的历史文献。

关于电抗四端网络的设计理论,在文献[16]中几乎都写了,但有关工作特性理论的论文,还有一篇代表著作是

- [2] S. Darlington: Synthesis of reactance 4-poles, J. M. P. 18 (1939), 257~353.

其次,关于 § 29, 32, 33, 35, 36 的代表性文献各举出一篇如下:

- [3] S. Darlington: The potential analogue method of network synthesis, B. S. T. J., 30 (1951), 315~365.
- [4] 喜安: 延迟网络的一种设计方法, 电试汇, 7 (1943), 153~157. [译者注: 请参照喜安: “延迟网络的一种设计方法”, 电气通信学会杂志, 第 27 卷, 第 8 号, 昭和 18 年 8 月, 598~610. 及其补遗, 电气通信学会杂志, 第 28 卷, 第 8 号, 昭和 19 年 8 月, 9~10.]
- [5] W. H. Kautz: Network synthesis for specified transient response, M. I. T. Tech. Rep., 209 (1952). [译者注: 请参照 W. H. Kautz: Transient synthesis in the Time-Domain, Trans. IRE PGCT., Vol. CT-1 (1954) No. 3, 29~39.]
- [6] 池野: 分布参数网络的设计理论, 通研实报, 4 (1955), 379~417.
- [7] B. D. H. Tellegen: The gyrator, a new electric network element, Philips. Res. Rep., 3 (1948), 81~101.

此外,在下列一篇论文中,对逼近理论作了概括的叙述,且列出了许多参考文献,可以参考一下。

- [8] S. Winkler: The approximation problem of network synthesis, Trans. IRE CT-1, 3 (1954), 5~20.

从 § 37 到 § 41, 若有必要,请参照文献[9]。下面两篇是文献[1]在 2n 端网络上的推广。

- [9] 大野: 一般多端网络的构成理论, 电气通信学会杂志, 31 (1948), 13~26.
- [10] B. McMillan: Introduction to formal realizability theory, B. S. T. J.,

31(1962), 217~279, 541~600.

文献[9]和[10]在方法上稍有不同。文献[10]内导入矩阵次数 (§42) 的概念, 讨论 L 和 C 的最少数目, 整个文章比较难懂。本书原来打算用易懂方式介绍出来, 但由于篇幅的关系, 只能割爱。下面一篇也是文献[1]的推广。

- [11] B. D. H. Tellegen: Synthesis of $2n$ -poles by networks containing the minimum number of elements, J. M. P., 12(1953), 1~18.

它在讨论含有理想变压器的元件数目上是重要的, 但在综合方法上, 对于象文献[9]和[10]的特殊情况那样的一般情况, 却不适用。此外, 在电阻元件数目最少的综合法方面 (§42), 还有一篇:

- [12] 大野: 按照电阻终端电抗网络群的一般多端网络构成理论, 电气通信学会杂志, 29(1946), 82~87. J. M. P., 29(1950), 13~26.

这个方法在导入 S 矩阵方面已经算陈旧了。

在 $2n$ 端网络方面, 有一篇至 1951 年左右的研究综合报告:

- [13] M. Bayard: Synthesis of n -terminal pair networks, Proc. Symposium Modern Network Synthesis (Polytech. Inst. Brooklyn, New York, 1952), 66~83.

关于 §43 以下的 S 矩阵, 可参阅

- [14] 大野, 安浦: 按照 S 矩阵的一般多端网络的构成理论, 电气通信学会杂志, 36(1953), 564~570. 九大工学纪要, 14(1954), 125~177. Trans. I.R.E., OT-3(1956), 111~120.

这一期的 Trans. IRE 是有关 S 矩阵的专刊, 载有 S 矩阵的各种应用。

- [15] 池野: 非互易多端网络的构成理论, 电气通信学会杂志, 37(1954), 97~102.

这一篇讨论了没有 S 矩阵的非互易网络的综合方法, 是文献[12]的推广。

书籍

- [16] W. Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen (Becker und Erlar, Leipzig, 1941).

这是一本网络理论的经典著作, 如果有了这一本书, 则除最近数年间的研究外, 就几乎不需要参考其他的直接原著。数学的知识也扼要地收集在内。关于初等因子 (§42, 46) 可参看本丛书的代数学或其他的代数学和矩阵论的书籍。最近又出了第2版 (Akademie-Verlag, Berlin, 1954). [译者注: 1960 年出版了第 II 卷, 其中收集了 Cauer 生前有关放大器设计、脉冲压缩的著作以及关于大的损耗元件实现理论等文章.]

- [17] H. W. Bode: Network analysis and feedback amplifier design (D. Van Nostrand, New York, 1945). 喜安译: 网络和反馈的理论 (岩波书店, 1955).

[译者注: 有中译本, 网络分析和反馈放大器设计, 人民邮电出版社, 1958.]

在这本书内, 一般地讨论了有源网络和很好地写出了实部和虚部的关系。

日文书籍有:

- [18] 永井, 神谷: 傳送回路网学 (コロナ社, 1937). [译者注: 1959 年的改订 14 版, 分上下两册, 内容上作了许多修改。]

这是一本有名的著作，对网络理论作了很好的叙述，影像参数部分特别详细。还有

[19] 宮田：回路網合成 I, II (共立社, 1954)

也是很有趣的一本。关于 RC 网络，本书内讲得很简单，进一步可参考

[20] 尾崎： RC 回路網 I, II (共立社通信工学讲座, 1955)。

关于 § 42 以下的内容，已经写成书的只有

[21] M. Bayard: Théorie des réseaux de Kirchhoff (Revue d'Optique, Paris, 1954)

对 $3n$ 端网络讨论得特别详细。此外，还有一本四端网络方面的有名著作

[22] C. M. Gewertz: Network synthesis (Williams and Wilkins, Baltimore, 1933). 早田保实译：电气回路网构成理论(上卷)(コナチ社, 1944.)。

问题的讨论比较陈旧，但许多数值例子值得参考。在文献[19]内，也有 Gewertz 理论的介绍。